LES CATÉGORIES

ADAM AABALDI, ALAEDDINE BENHEDDI, OUMAIMA CHRIF, NASSIRA DOUMA, MACTAR GUEYE, MOUSTAPHA GUEYE, JENO JEYATEES, MAMADOU KAMARA, CORENTIN LEROY-BURY, CHUNG ANH NGUYEN, HUGO PAQUET, LYES SAADI, ADYA SARR, BRUNO VALLETTE

"Mal nommer les choses contribue au malheur du monde"

Albert Camus

Résumé. Notes du séminaire sur les catégories de la classe de Double Licence 3 Mathématiques-Informatique de l'Université Sorbonne Paris Nord 2023-2024.

Table des matières

Introduction : l'algèbre moderne

L'Algèbre ou l'analyse des équations. Le mot français «algèbre» provient du mot arabe «al-jabr» qui apparait dans le titre du livre «Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison» publié par en 825 par Al-Khwarizmi, mathématicien perse. Cet ouvrage est le premier à étudier systématiquement la résolution des équations du premier et du second degré. Il est intéressant de noter qu'il se compose de deux parties : la première contient la théorie abstraite des équations algébriques où l'accent est mis sur le type d'opérations utilisées, la seconde contient les diverses applications en vue à l'époque comme les calculs d'héritage, d'arpentage ou de commerce. Le mot arabe «al-jabr», qui signifie «la

Date: 22 décembre 2023.

réduction» au sens de «la réduction d'une fracture», est la terminologie choisie par Al-Khwarizmi pour une des opérations sur les équations, celle qui consiste à réduire une équation en ajoutant des termes, soit deux termes de même nature d'une même côté d'une équation comme

$$x^2 + 3x^2 = 5x + 3 \iff 4x^2 = 5x + 3\ ,$$

soit deux termes identiques de part et d'autres de l'équation comme

$$3x^2 + 3 = -5x \iff 3x^2 + 5x + 3 = 0\ .$$

(Il est amusant de noter qu'en espagnol le terme dérivé «algebrista» signifie à la fois un algébriste ou un rebouteux, celui qui réduit les fractures.)

Disons rapidement que jusqu'au XIX^{e}, les mathématiciens font des calculs, parfois du même type sur des objets différents. Même s'ils savent utiliser des variables à la place de nombres, s'ils se servent d'une notation pour le 0 ou qu'ils peuvent considérer des nombres imaginaires, peu de place est alors accordée à la théorie de ses calculs. La première moitié du XIX^{e} siècle voit une renaissance de l'Algèbre par l'introduction de nouveaux concepts, méthodes et objets pour la résolution des équations algébriques. D'ailleurs, Serret en 1866 écrit en introduction de son *Cours d'algèbre supérieure* (sic) que «L'Algèbre [est], à proprement parlé, l'Analyse des équations».

L'algèbre ou l'axiomatisation des structures algébriques. C'est donc à partir de la seconde moitié du XIX^{e} siècle que naît la forme actuelle de l'Algèbre qui consiste à axiomatiser les propriétés des opérations apparaissant dans le traitement des équations et à étudier les structures algébriques qui en résultent plus qu'à étudier les manières de résoudre les dites équations. Voici ce qu'écrit Bourbaki dans son «Élements d'histoire des mathématiques» : «Nous arrivons ainsi à l'époque moderne, où la méthode axiomatique et la notion de structure (sentie d'abord, définie à date récente seulement), permettent de séparer des concepts qui jusque-là avaient été inextricablement mêlés, de formuler ce qui était vague ou inconscient, de démontrer avec la généralité qui leur est propre les théorèmes qui n'étaient connus que dans des cas particuliers.» Trois grandes familles d'équations y ont alors joué un rôle crucial.

Les équations linéaires: Elles sont du type

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 2y + z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 2\ . \end{array} \right.$$

La théorie des espaces dans lesquels en elles s'expriment à donné naissance à la notion d'*espaces vectoriels*, dont l'axiomatisation a été donnée principalement par Peano en 1888.

Les équations diophantiennes: Elles sont type

$$2^x - 1 = y \quad \text{ou} \quad x^5 + y^5 = z^5\ ,$$

avec pour solutions des nombres entiers. Leur étude abstraite a donné naissance aux notions algébriques d'*anneaux*, d'*idéaux* et de *corps*, via celle de nombre algébrique gr‰ce principalement à l'école allemande des Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind, Hilbert, après bien sur les travaux de Gauss.

Les équations polynomiales: Elles sont du type

$$8x^3 - 3x^2 + x + 7 = 0\ .$$

L'étude de leurs solutions a donné naissance à la notion de *groupe*. Galois est en assurément le principal instigateur mais ses travaux fulgurants mais succincts ne sont publiés et diffusés par Liouville et Serret que bien des années après sa mort en 1832. L'émergence conceptuelle de cette notion doit beaucoup au «Traité des substitutions et des équations algébriques» de Camille Jordan (1870).

Que se passe-t-il à chaque fois ? On reconnait dans différents exemples des opérations, méthodes et résultats similaires. Il s'agit alors d'en extraire une substantifique moelle : on fait ressortir les propriétés communes essentielles que l'on érige en axiomes pour définir une nouvelle notion conceptuelle. Prenons l'exemple de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire des espaces vectoriels. Comment travaille-t-on avec des objets apparemment si différents que sont

- la droite, le plan, l'espace ambiant,
- les matrices (tableaux de nombres),
- $\mathbb{R}^n$,
- les polynômes,
- les applications ensemblistes réelles (à valeurs dans $\mathbb{R}$),
- les applications continues réelles,
- les applications C^∞ réelles,
- les applications mesurable réelles,
- les ensembles de solution de systèmes d'équations linéaires homogènes,
- les ensembles de solution de systèmes d'équations différentielles homogènes,
- les suites numériques satisfaisant un relation de récurrence linéaire,
- les extensions de corps,
- etc. ?

On se rend compte que tous les calculs utilisent deux opérations et que ces dernières vérifient toujours le même type de relations. La première opération est une opération binaire consistant à *sommer* les éléments :

$$E \times E \xrightarrow{+} E \ .$$

Cette addition vérifie à chaque fois les mêmes propriétés : associativité, commutativité, présence d'un neutre (0). Cette structure est enrichie par la présence d'une action du corps de base : on sait multiplier ces éléments par des nombres :

$$\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\cdot} E \ .$$

Dans ce cas aussi, tous les exemples susmentionnés vérifient la même liste de relations : associatitivé, distributivité, action du neutre, et action sur le 0. Facile alors de donner la définition abstraite et générale d'un espace vectoriel.

Intérêts de l'axiomatisation. On l'a tous bien senti, le cerveau commence à chauffer. Il y a en effet un prix à payer pour arriver à concevoir cette axiomatisation, c'est celui de travailler de plus en plus abstraitement. Se pose du coup avec acuité la question de l'intérêt d'une telle démarche ; essayons d'en dégager quels bénéfices.

(1) Cette conceptualisation offre une prise de hauteur remarquable. Cela permet de mettre sur un même pied différents objets qui sont au fond de même nature et cela donne des moyens de les comparer efficacement à l'aide d'une bonne notion de morphisme.
EXEMPLE : En algèbre linéaire, on dispose d'une notion d'*application linéaire* entre espaces vectoriels qui permet de les comparer facilement (injectivité-noyau, surjectivité, dimension, etc.)

(2) Établir une telle théorie générale permet de démontrer d'un seul coup un résultat qui sera valable automatiquement dans tous les exemples de la théorie. Cela permet une simplification conceptuelle des énoncés.
EXEMPLE : L'existence de bases et leur cardinal qui définit la notion de dimension.

(3) L'approche abstraite permet de s'affranchir des contraintes imposées à l'esprit par tel ou tel domaine.

EXEMPLE : La géométrie peut nous faire penser que la dimension finie est une hypothèse indispensable, il n'en est souvent rien.

(4) Extraire un type de structure algébrique permet de mettre au jour ce type de structure sur de nouveaux objets et ainsi d'y appliquer les méthodes d'autres domaines.
EXEMPLE : Utiliser les méthodes vectoriels puissantes de dimension dans le domaine des extensions de corps.

(5) Cette axiomatisation, une fois bien digérée, permet de voir dans quelle direction poursuivre les recherches. On peut dire que cette sédimentation des idées amènent irrémédiablement à une renaissance quelques (dizaines ?) années plus tard.
EXEMPLE : La notion d'espace vectoriel ouvre ensuite les portes à celles d'algèbres (associatives, commutatives, de Lie), d'espace tangent d'une variété, d'espace vectoriel topologique, etc.

(6) Cette démarche met au jour un language universel dont d'autres matières peuvent d'emparer avec intérêt.
EXEMPLE : Les méthodes et le language de l'algèbre linéaire ont été accaparé par de nombreux champs de la connaissance comme la mécanique, les sciences naturelles ou les sciences sociales, par exemple. En économie, la modélisation de l'état de l'économie à plusieurs facteurs comme celle d'un pays à l'aide de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ a permis à Leontief d'obtenir le «prix Nobel» d'économie en 1973. En effet, si on considère que l'évolution d'une telle économie évolue suivant des règles constantes et linéaires, on est ramené à itérer un endomorphisme, dont la réduction permettra de faire efficacement de la prospective.

L'Algèbre moderne. Sous l'impulsion de l'école allemande des Dedekind, Hilbert, Steinitz, Artin, Noether une unification conceptuelle des notions susmentionnées est entreprise entre 1900 et 1930. Son point culminant est le livre de Van der Waerden, publié en 1930 et dont le titre est bien sur «Algèbre moderne», en français.

Bourbaki. C'est en 1935 que naquit le groupe Bourbaki dont l'ambition n'est rien de moins que d'offrir une présentation cohérente et exhaustive des mathématiques de son époque. Pour se faire, il faut une bonne méthode. Il commence donc par un premier volume de fondation avec la théorie des ensembles, puis continue avec l'Algèbre, etc. Le style est aussi détonnant pour l'époque; Bourbaki écrit ainsi en exergue de chaque de ses traités : « Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier», un peu comme chez Al-Khwarizmi ! Bourbaki choisit donc de décrire les mathématiques à travers les diverses structures qui les composent. Cela fera dire à Emil Artin : «Notre époque assiste à la création d'un ouvrage monumental : un exposé de la totalité des mathématiques d'aujourd'hui. De plus, cet exposé est fait de telle manière que les liens entre les diverses branches des mathématiques deviennent clairement visibles». Car évidement, le fait de faire ressortir les différentes structures présentes permet de faire des liens entre les différents domaines.

1. CATÉGORIES

Imaginez-vous dans un vaste musée, où les chefs-d'œuvre de l'art mathématique prennent vie sous la lumière douce de la théorie et l'abstraction. Au cœur de cette galerie se trouve une salle mystérieuse, un sanctuaire intellectuel où les mathématiciens et mathématiciennes se réunissent pour explorer l'un des concepts les plus puissants et englobants qui soient : les catégories. Les catégories sont bien plus que de simples ensembles d'objets et de flèches que nous allons découvrir par la suite. Elles sont un concept central en mathématiques qui permet de structurer et d'organiser les objets mathématiques ainsi que les relations entre eux afin d'avoir une vue globale de ces dernières et de les étudier uniformément. Cette partie va nous aider à pénétrer dans ce monde abstrait et à découvrir ces fameuses catégories en s'appuyant sur des exemples pertinents et en soulignant sur les remarques, questions faites et réflexions qui en découlent.

1.1. **Définitions et exemples.**

1.1.1. *Définition.*

Définition 1 (Catégorie). Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est composée des éléments suivants :

- une collection d'*objets*, notée $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}} : X, Y, Z, \ldots$,
- une collection de *flèches*, notée $\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}} : \nearrow, \swarrow, \uparrow, \downarrow, \rightarrow, \ldots$,
- deux applications $\mathrm{source} : \mathrm{Flech}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et $\mathrm{but} : \mathrm{Flech}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$,
- une *composition* : pour toute paire de flèches
$$f : X \to Y \quad \text{et} \quad g : Y \to Z \quad \text{telles que} \quad \mathrm{source}(g) = \mathrm{but}(f),$$
il existe une flèche
$$g \circ f : X \to Z \quad \text{telle que} \quad \mathrm{source}(g \circ f) = \mathrm{source}(f) \text{ et } \mathrm{but}(g \circ f) = \mathrm{but}(g),$$
- des *identités* : pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe une flèche
$$\mathrm{id}_X : X \to X \quad \text{telle que} \quad \mathrm{source}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{but}(\mathrm{id}_X) = X.$$

La composition est *associative*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
et *unitaire*
$$f \circ \mathrm{id}_X = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

1.1.2. *Catégories «concrètes».*

Exemple 1 (La catégorie des ensembles). La *catégorie* $\mathscr{E}ns$ *des ensembles* est formée des données suivantes :

- ses objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{E}ns}$ sont les ensembles : $X, Y, Z, \ldots$,
- ses flèches $\mathrm{Flech}_{\mathscr{E}ns}$ sont les applications ensemblistes : $f : X \to Y$,
- l'application source associe à toute flèche $f : X \to Y$ son ensemble de départ (X) et l'application but associe à toute flèche $f : X \to Y$ son ensemble d'arrivée (Y),
- la composition des flèches est la composition usuelle $g \circ f$ des applications ensemblistes,
- pour tout ensemble X, sa flèche identité est l'application ensembliste identité de X définie par $\mathrm{id}_X(x) \coloneqq x$.

Remarque. Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles (paradoxe de Russell), c'est pourquoi on a utilisé la notion de collection dans la définition de catégories et non celle d'ensemble. Ceci nous a permis d'inclure l'exemple de la catégorie des ensembles.

Exemple 2 (Catégorie des espaces vectoriels). La *catégorie* $\mathscr{V}ect$ *des espaces vectoriels* sur un corps $\mathbb{K}$ fixé est formée des données suivantes :

- ses objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{V}ect}$ sont les espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$,
- ses flèches $\mathrm{Flech}_{\mathscr{V}ect}$ sont les applications linéaires,
- l'application source associe à toute flèche $f : X \to Y$ son espace vectoriel de départ (X) et l'application but associe à toute flèche $f : X \to Y$ son espace vectoriel d'arrivée (Y),
- la composition des flèches est la composition $g \circ f$ des applications linéaires,
- pour tout espace vectoriel X, sa flèche identité est l'automorphisme identité id_X de X.

Exemple 3 (Catégories des corps). La *catégorie* $\mathscr{C}or$ *des corps* est formée des données suivantes :

- ses objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}or}$ sont les corps,
- ses flèches $\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}or}$ sont les morphismes de corps,

- l'application source associe à toute flèche $f\colon X \to Y$ son corps de départ (X) et l'application but associe à toute flèche $f\colon X \to Y$ son corps d'arrivée (Y),
- la composition des flèches est la composition $g \circ f$ des morphismes de corps,
- pour tout corps $\mathbb{K}$, sa flèche identité est l'automorphisme identité $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$.

De manière analogue, on pourrait introduire les catégories des anneaux, des groupes, des groupes abéliens, etc. On parle ici de catégories «concrètes» car les flèches sont toutes des applications ensemblistes (vérifiant parfois des propriétés).

1.1.3. *Catégories «non-concrètes».* Toutes les catégories ne sont pas forcément faites de flèches qui sont des applications ensemblistes, en voici quelques exemples.

Exemple 4 (Catégories des quaternions). La catégorie $\mathcal{Quat}$ des quaternions est formée des données suivantes :

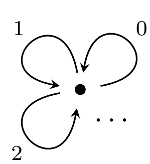
- cette catégorie n'a qu'un seul objet $\mathrm{Obj}_{\mathcal{Quat}} := \{\bullet\}$,
- ses flèches sont les éléments de l'algèbre des quaternions
$$\mathrm{Flech}_{\mathcal{Quat}} := \mathbb{H} = \{\alpha 1 + \beta \mathrm{i} + \gamma \mathrm{j} + \delta \mathrm{k} \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$
- les deux applications source et but sont identiques : elles associent à tout quaternion l'unique objet $\bullet$,
- la composition des flèches est définie par le produit des quaternions dont on rappelle qu'il est déterminé par
$$\begin{aligned} &\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1 \;, \\ &\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k} \;,\; \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i} \;,\; \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j} \;, \end{aligned}$$
- l'identité de l'unique objet $\bullet$ est l'unité 1 de l'algèbre des quaternions.

Exemple 5 (Les catégories $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}+}$ et $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}*}$). La catégorie $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}+}$ est formée des données suivantes :

- cette catégorie n'a qu'un seul objet $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}+}} := \{\bullet\}$,
- ses flèches sont les entiers relatifs $\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}+}} := \mathbb{Z}$,
- les deux applications source et but sont identiques : elles associent à tout entier l'unique objet $\bullet$,
- la composition des flèches est définie par la *somme* des entiers,
- l'identité de l'unique objet $\bullet$ est 0.

La catégorie $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}*}$ est formée des données suivantes :

- cette catégorie n'a qu'un seul objet $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}*}} := \{\bullet\}$,
- ses flèches sont les entiers relatifs $\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}_{\mathbb{Z}*}} := \mathbb{Z}$,
- les deux applications source et but sont identiques : elles associent à tout entier l'unique objet $\bullet$,
- la composition des flèches est définie par le *produit* des entiers,
- l'identité de l'unique objet $\bullet$ est 1.



Ces deux derniers exemples montrent qu'il ne suffit pas de donner les objets et les flèches pour décrire une catégorie : les données des compositions et des identités sont importantes. Dans les deux cas précédents, les objets et les flèches sont les mêmes, mais les deux catégories diffèrent par leurs compositions et identités.

1.1.4. *Contre-exemple.* Quoi de mieux pour bien assimiler la notion de catégorie que de trouver un «contre-exemple». On considère les données suivantes :

- on se donne 4 objets : X, Y, Z, W,
- on se donne 7 flèches : $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, $\phi\colon X \to Z$, $\psi\colon Y \to W$, $\alpha\colon X \to W$, $\beta\colon W \to Z$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left=50, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] \arrow[rrr, bend right=50, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

- la composition est définie par : $g \circ f \coloneqq \phi$, $h \circ g \coloneqq \psi$, $\psi \circ f \coloneqq \beta$, $h \circ \phi \coloneqq \alpha$.
- chaque objet X, Y, Z, W admet une identité respective $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y, \mathrm{id}_Z, \mathrm{id}_W$.

On voit que la composition *n'est pas associative* : $(h \circ g) \circ f = \beta \neq \alpha = h \circ (g \circ f)$. Bon, on voit bien que nous avons tout fait pour construire un contre-exemple *ad hoc* de catégorie ...

1.1.5. *Catégories petites et localement petites.* On peut aussi donner une autre définition des catégories en regroupant chaque sous-collection de flèches en fixant la source et le but. On remarque aussi que les flèches sont souvent appelées *morphismes* (voire *homomorphismes*). Soit f une flèche de source X et de but Y, on dira que f appartient à la collection des morphismes de X dans Y, qu'on notera au choix

$$\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathscr{C}(X, Y).$$

Ceci donne la définition équivalente suivante de catégorie, où il n'y a plus besoin d'applications «source» et «but» !

Définition 2 (Catégorie (bis)). Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est composée des éléments suivants :

- une collection d'*objets*, notée $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$: $X, Y, Z, \ldots$,
- des collections de *flèches* (ou *morphismes*) pour toute paire d'objets X et Y, notées $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$: $f, g, h, \ldots$,
- une *composition* : pour toute paire de flèches f de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ et g de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, on a une flèche $g \circ f$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$,
- des *identités* : pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe une flèche id_X dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$.

La composition est *associative*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

et *unitaire*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f.$$

Dans la définition de la notion de catégorie, on utilise des collections d'objets et de morphismes, et non des ensembles. Cela nous donne plus de flexibilité, et nous évite certaines restrictions vis-à-vis des ensembles. Néanmoins, il peut arriver que certaines catégories soient constituées d'ensembles.

Définition 3 (Petite catégorie). Une catégorie $\mathscr{C}$ est dite *petite* si ses objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et ses flèches $\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}}$ forment un ensemble.

Exemple 6. La catégorie $\mathbb{1}$ composée d'un seul objet $\mathrm{Obj}_{\mathbb{1}} \coloneqq \{\bullet\}$ et d'une seule flèche $\mathrm{Flech}_{\mathbb{1}} \coloneqq \{\to\}$ munie de la composition et de l'identité évidentes est une petite catégorie.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Contrexemple. La catégorie $\mathscr{E}\mathit{ns}$ des ensembles n'est pas une petite catégorie. En effet, l'ensemble des ensembles n'existe pas (cf. paradoxe de Russel). La catégorie des espaces vectoriels et des corps ne forment pas non plus de petites catégories, parce qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les espaces vectoriels, ni d'ensemble de tous les corps, on doit donc se limiter aux collections.

Néanmoins, limiter les objets aux ensembles n'est pas toujours ce que l'on recherche et peut donc se révéler trop restrictif, comme le montre les exemples ci-dessus. Nous proposons donc plutôt de limiter nos collections de morphismes aux ensembles.

Définition 4 (Catégorie localement petite). Une catégorie est dite *localement petite* si, pour toute paire d'objets X, Y, les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ de X vers Y forment un ensemble.

Exemple 7. La catégorie des ensembles $\mathscr{E}\mathit{ns}$ est localement petite : pour tous ensembles X, Y, les applications ensemblistes de X vers Y forment un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns}(X, Y)$. Il en va de même pour la catégorie $\mathscr{V}\mathit{ect}$ des espaces vectoriels et la catégorie $\mathscr{C}\mathit{or}$ des corps qui sont des petites catégories.

Remarque. On a peut voir que : petite catégorie $\implies$ catégorie localement petite. Par contre si on ne n'exige uniquement que les objets forment un ensemble, alors, il se peut que la catégorie ne soit pas localement petite comme le montre le contre-exemple suivant :

- $\mathrm{Obj} = \{\cdot\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, \cdot)$ = la collection des ensembles
- $\circ$ = l'union disjointe des ensembles : Pour tous A, B des ensembles, $A \sqcup B$ est un ensemble, donc fait partie de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, \cdot)$
- $\mathrm{id.} = \emptyset$

Cette catégorie vérifie les propriétés :

- $(A \sqcup B) \sqcup C = A \sqcup (B \sqcup C)$
- $A \sqcup \mathrm{id.} = A \sqcup \emptyset = A$ et $\mathrm{id.} \sqcup B = \emptyset \sqcup B = B$

Ici, nos objets forment un ensemble, l'ensemble à un seul élément. Pourtant, les morphismes ne forment pas un ensemble, ce n'est donc pas une catégorie localement petite.

1.2. **Constructions de catégories.**

1.2.1. *Catégories associées à des ensembles partiellement ordonnés.*

Définition 5 (Ensemble partiellement ordonné). Un *ensemble partiellement ordonné* $\pi = (E, \leq)$ est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$, c'est-à-dire une relation binaire vérifiant :

- réflexivité : $\forall x \in E,\ x \leq x$,
- transitivité : $\forall x, y, z \in E,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
- antisymétrie : $\forall x, y \in E,\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Exemple 8 (Ensemble des parties). Pour tout ensemble X, l'ensemble $E := \mathscr{P}(X) = \{A \subset X\}$ de ses parties est un ensemble partiellement ordonné où la relation d'ordre est donnée par l'inclusion $\leq := \subset$.

On peut représenter un tel ensemble avec un diagramme, le diagramme de Hasse, qui met en évidence l'ordre établi dans l'ensemble.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On peut associer canoniquement une catégorie à tout ensemble partiellement ordonné.

Définition-Proposition 1 (Catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné). Soit $\pi = (E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. Les données suivantes forment une catégorie, notée $\mathscr{C}_\pi$:

- $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_\pi} \coloneqq E$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\pi}(e, e') \coloneqq \begin{cases} e \to e' \,, & \text{si } e \leq e' \,, \\ \emptyset \,, & \text{sinon .} \end{cases}$
- La composition est donnée par la transitivité : $\forall e, e', e'' \in E$, tels que $e \to e'$ et $e' \to e''$, on définit leur composée par l'unique flèche $e \to e''$, qui existe car on a $e \leq e'$ et $e' \leq e''$, et par transitivité $e \leq e''$.
- Les identités sont données par la réflexivité : $\forall e \in E$, $\mathrm{id}_e : e \to e$, car $e \leq e$.

Démonstration.

- ASSOCIATIVITÉ : soient $e, e', e'', e''' \in E$ tels que $e \leq e' \leq e'' \leq e'''$; les deux compositions suivantes sont égales à l'unique flèche de e vers e''' :
$$(e \to e' \to e'') \to e''' = e \to e''' = e \to (e' \to e'' \to e''') \,.$$
- UNITAIRE : soient $e, e' \in E$ tels que $e \leq e'$; les deux compositions suivantes sont égales à l'unique flèche de e vers e' :
$$(e \xrightarrow{\mathrm{id}_e} e) \to e' = e \to e' = (e \to e') \xrightarrow{\mathrm{id}_{e'}} e' \,.$$

□

1.2.2. *Catégorie associée à un graphe.* Les graphes sont des outils centraux en mathématiques et en informatique. On peut déjà remarquer une certaine proximité entre les graphes et les catégories : on représente souvent des catégories au moyen de graphes. On peut aussi créer des graphes à partir d'ensembles partiellement ordonnés via la notion de diagramme de Hasse.

Définition 6 (Graphes).

- Un *graphe* $G = (S, A)$ est un ensemble S (fini et non vide) de *sommets* et un ensemble A de paires de sommets appelées *arêtes.*
- Un graphe $G = (S, A)$ est *dirigé* lorsque toutes ses arêtes sont des paires *ordonnées* de sommets, c'est-à-dire $A \subset S \times S$.
- Un graphe G est dit *complet* lorsqu'il est constitué de toutes les arêtes possibles.

On ne considérera ici que des graphes dirigés. On peut maintenant se demander quels types de graphes dirigés donnent naissance à des catégories.

Définition 7 (Graphe transitifs, graphes réflexifs).

- Un graphe dirigé $G = (S, A)$ est *transitif* si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$ implique $(x, z) \in A$.
- Un graphe dirigé $G = (S, A)$ est *réflexif* si pour tout $x \in S$, on a $(x, x) \in A$.

Définition-Proposition 2 (Catégorie associée à un graphe transitif et réflexif). Pour tout graphe dirigé $G = (S, A)$ transitif et réflexif, les données suivantes forment une catégorie notée $\mathscr{C}_G$:

- $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_G} \coloneqq S$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_G}(s, s') \coloneqq \begin{cases} s \to s' \,, & \text{si } (s, s') \in A \,, \\ \emptyset \,, & \text{sinon .} \end{cases}$
- La composition est donnée par la transitivité du graphe : soient $s \to s'$ et $s' \to s''$, on définit leur composée par l'unique flèche $s \to s''$, qui existe car on a $(s, s') \in A$ et $(s', s'') \in A$, puis $(s, s'') \in A$ par transitivité du graphe.
- Les identités sont données par la réflexivité du graphe : $\forall s \in S$, $\mathrm{id}_s : s \to s$, car $(s, s) \in A$.

Démonstration.

- Associativité : soient $s, s', s'', s''' \in S$ tels que $(s, s') \in A$, $(s', s'') \in A$ et $(s'', s''') \in A$; les deux compositions suivantes sont égales à l'unique flèche de s vers s''' :
$$(s \to s' \to s'') \to s''' = s \to s''' = s \to (s' \to s'' \to s''') .$$
- Unitaire : soient $s, s' \in S$ tels que $(s, s') \in A$; les deux compositions suivantes sont égales à l'unique flèche de s vers s' :
$$(s \xrightarrow{\mathrm{id}_s} s) \to s' = s \to s' = (s \to s') \xrightarrow{\mathrm{id}_{s'}} s' .$$

□

Proposition 1. *Il existe une bijection entre les ensembles partiellement ordonnés finis et les graphes dirigés transitifs et réflexifs :*

$$\textit{Ensembles partiellement ordonnés finis} \Longleftrightarrow \textit{Graphes dirigés transitifs et réflexifs} .$$

Démonstration.

- Ensemble partiellement ordonné fini $\mapsto$ Graphe dirigé transitif et réflexif . Montrons que nous pouvons construire un graphe dirigé transitif et réflexif pour tout ensemble partiellement ordonné fini : soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonnée fini, on considère le graphe dirigé $G := (E, A)$ où et $A = \{(s, s') \in E^2, e \leq e'\}$. Un tel graphe est transitif, car $\forall (s, s'), (s', s'') \in A$, on a $(s, s'') \in A$: si $s \leq s'$ et $s' \leq s''$, alors $s \leq s''$ par transitivité. Et, ce graphe est réflexif, car $\forall s \in E, (s, s) \in A : s \leq s$ par réflexivité.
- Graphe dirigé transitif et réflexif $\mapsto$ Ensemble partiellement ordonné fini . Montrons que nous pouvons construire un ensemble partiellement ordonné pour tout graphe dirigé transitif et réflexif. Soit $G = (S, A)$ un graphe dirigé transitif et réflexif, on considère l'ensemble $(S, \leq)$ des sommets muni de la relation définie par $e \leq e'$ si $(e, e') \in A$. Cette relation est réflexive, c'est-à-dire $\forall e \in S$, $e \leq e$, car $(e, e) \in A$ par réflexivité du graphe. Cette relation est aussi transitive, c'est-à-dire $\forall e, e', e'' \in E$ tels que $e \leq e'$ et $e' \leq e''$, on a $e \leq e''$: en effet, $(e, e'), (e', e'') \in A$ implique $(e, e'') \in A$ par transitivité du graphe. Enfin, cette relation $\leq$ est antisymétrique, car le graphe est simple, donc, s'il existe $e, e' \in S$ tels que $e \leq e'$, cela signifie que $(e, e') \in A$, et le seul cas où $(e', e) \in A$ (c'est-à-dire $e' \leq e$) est celui où $e = e'$.

□

Remarque. On vient de voir qu'il y a équivalence entre les ensembles partiellement ordonnés finis et les graphes dirigés transitifs et réflexifs. Cette équivalence est compatible avec les constructions respectives de catégories :

$$\begin{tikzcd}
\text{Ensembles partiellement ordonnés finis} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr] & & \text{Graphes dirigés transitifs et réflexifs} \arrow[dl] \\
& \text{Catégories} &
\end{tikzcd}$$

Nous avons donc réussi à englober les ensembles partiellement ordonnées et les graphes dirigés transitifs et réflexifs dans les catégories. Après tout, nous avons schématiquement représenté plusieurs de nos catégories par des graphes et des ensembles partiellement ordonnés.

1.2.3. *Union disjointe de catégories.* Maintenant que nous avons vu comment définir la notion de catégorie, nous pouvons chercher comment construire de nouvelles catégories à partir de catégories existantes.

Définition-Proposition 3 (Union disjointe de catégories). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. On appelle *union disjointe de* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{D}$ la catégorie $\mathscr{C} \sqcup \mathscr{D}$ formée des données suivantes.

- La collection $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}\sqcup\mathscr{D}}$ de ses objets est formée des objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ et des objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}$ de $\mathscr{D}$ de manière disjointe.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\sqcup\mathscr{D}}(E,F) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)\,, & \text{si } E \text{ et } F \text{ sont dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}\,, \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E,F)\,, & \text{si } E \text{ et } F \text{ sont dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}\,, \\ \emptyset\,, & \text{sinon.} \end{cases}$
- Les compositions et les identités de $\mathscr{C} \sqcup \mathscr{D}$ sont celles de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

Démonstration.

- La composition est bien associative par l'associativité des compositions de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ respectivement.
- La composition est bien unitaire par l'unitarité des identités de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ respectivement.

$\square$

Exemple 9. Dans l'exemple suivant, on omet de représenter les flèches identités pour plus de clarté.

$$\mathscr{C} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathscr{D}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right=80] & \\
2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 \\
 & 4 &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & a \arrow[dl] & \\
b \arrow[rr] & & c \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\mathscr{C} \sqcup \mathscr{D}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right=80] & & & a \arrow[dl] & \\
2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 & b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \\
 & 4 & & & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2. *La construction de l'union disjointe est* commutative*, c'est-à-dire que les deux catégories* $\mathscr{C}\sqcup\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{C} \sqcup \mathscr{D}$ *sont «les mêmes».*

Démonstration. Tout objet est dans $\mathscr{C} \sqcup \mathscr{D}$ si et seulement si il est dans $\mathscr{D} \sqcup \mathscr{C}$. Les flèches, compositions et identités des deux catégories sont identiques. $\square$

Remarque. La lectrice ou le lecteur attentif aura remarqué notre gène (mathématique) : nous n'avons pas encore défini de notion d'«équivalence» ou d'«isomorphisme» de catégorie ... Cela en saurait tarder.

1.2.4. *Joint de catégories.*

Définition-Proposition 4 (Joint de catégories). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. On appelle *joint entre* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{D}$ la catégorie $\mathscr{C} \triangleright \mathscr{D}$ formée des données suivantes.

- $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}\sqcup\mathscr{D}} \coloneqq \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}\triangleright\mathscr{D}}$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\triangleright\mathscr{D}}(E,F) \coloneqq \begin{cases} \{E \to F\}\,, & \text{si } E \text{ est dans } \mathrm{Obj}\mathscr{C} \text{ et } F \text{ est dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}\,, \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(E,F)\,, & \text{si } E \text{ et } F \text{ sont dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}\,, \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E,F)\,, & \text{si } E \text{ et } F \text{ sont dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}\,, \\ \emptyset\,, & \text{si } E \text{ est dans } \mathrm{Obj}\mathscr{D} \text{ et } F \text{ est dans } \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}\,. \end{cases}$
- Les compositions de la catégorie joint $C \triangleright D$ sont données par les compositions des catégories $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$ lorsque les trois objets appartiennent à une de ces deux catégories. Sinon, lorsque deux objets appartiennent à une catégorie et le troisième objet à l'autre catégorie, la composition est l'unique flèche entre le premier objet et le dernier.

- Les identités de la catégorie joint $\mathscr{C} \triangleright \mathscr{D}$ sont celles des catégories $\mathscr{C}$ et celles de $\mathscr{D}$.

Exemple 10. Dans l'exemple suivant, on omet de représenter les flèches identités et les compositions pour plus de clarté.

$$\mathscr{C} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 \\ & 4 & \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathscr{D} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d] \\ b \end{tikzcd}$$

$$\mathscr{C} \triangleright \mathscr{D} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & & & \\ 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 \arrow[dr] & & \\ & 4 \arrow[rr] & & a \arrow[r] & b \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathscr{D} \triangleright \mathscr{C} \qquad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & & & a \arrow[dl] \\ 2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 & b \arrow[ull] & \\ & 4 & & & \end{tikzcd}$$

Démonstration.

- Pour tout triplet de flèches composables $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$, si les quatre objets E, F, G, H appartiennent à la catégorie $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{D}$ respectivement, alors l'associativité de la composition des morphismes de la catégorie $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{D}$ respectivement donne
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$
Si E, E et F, ou E, F et G sont des objets de la catégorie $\mathscr{C}$, alors les deux compositions $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont égales car elles coincident chacune avec l'unique flèche $E \to H$.
- Soit $f : E \to F$ un morphisme de la catégorie joint $\mathscr{C} \triangleright \mathscr{D}$. Si les deux objets E et F appartiennent à la même catégorie $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{D}$, l'unitarité respective des catégories $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{D}$ donne $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$. Si E est un object de $\mathscr{C}$ et si F est un objet de la catégorie $\mathscr{D}$, comme il n'existe qu'un seul morphisme entre E et F, alors il est égal aux trois morphismes $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$.

□

Remarque. La joint entre les catégories n'est *pas* une construction commutative comme le montre l'exemple ci-dessus.

Proposition 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la catégorie $\mathscr{C}_{[n]}$ associée à l'ensemble totalement ordonné $[n] \coloneqq (\{1, \ldots, n\}, \leq)$. La catégorie joint de $\mathscr{C}_{[m]}$ avec $\mathscr{C}_{[n]}$ est la catégorie*
$$\mathscr{C}_{[n]} \triangleright \mathscr{C}_{[m]} = \mathscr{C}_{[n+m]} \ .$$

Démonstration. Encore une fois, cette démonstration est informelle car nous n'avons pas encore de notion de comparaison entre catégories. Étudions néanmoins la catégorie joint $\mathscr{C}_{[n]} \triangleright \mathscr{C}_{[m]}$. En omettant les morphismes identités, les morphismes «élémentaires», c'est-à-dire ceux à partir desquels on peut obtenir tous les autres par composition sont les suivants :
$$\mathscr{C}_{[n]} : 1 \to 2 \to \cdots \to n \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_{[m]} : 1 \to 2 \to \cdots \to m \ .$$
Avec la même convention, les morphismes «élémentaires» de la catégorie joint $\mathscr{C}_{[n]} \triangleright \mathscr{C}_{[m]}$ sont les suivants :
$$\mathscr{C}_{[n]} \triangleright \mathscr{C}_{[m]} \ : \ 1_{\mathscr{C}} \to 2_{\mathscr{C}} \to \cdots \to n_{\mathscr{C}} \to 1_{\mathscr{D}} \to 2_{\mathscr{D}} \to \cdots \to m_{\mathscr{D}} \ .$$

La composition des morphismes de $\mathscr{C}_{[n]} \triangleright \mathscr{C}_{[m]}$ et le fait que chaque élément de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_{[n]}}$ a un morphisme vers chaque élément de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}_{[m]}}$ nous permettent de compléter «l'ordre» entre $[n]$ et $[m]$: en notant, $1_{\mathscr{D}} = n+1$, $2_{\mathscr{D}} = n+2$, $\ldots$, $m_{\mathscr{D}} = n+m$, on retrouve bien la catégorie $\mathscr{C}_{[n+m]}$. □

1.2.5. *Produit de catégories.*

Définition-Proposition 5 (Produit de catégories). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. On appelle *produit de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$* la catégorie $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ formée des données suivantes.

- La collection $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}$ de ses objets est formée des paires (E, F) d'objets E de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et F de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}$.
- Les morphismes de (E, F) vers (E', F') sont les paires (f, g) de morphismes $f : E \to E'$ de $\mathscr{C}$ et $g : F \to F'$ de $\mathscr{D}$ respectivement.
- La composition de deux paires $(f : E \to E', g : F \to F')$ et $(f' : E' \to E'', g : F' \to F'')$ est définie par la paire de composées :

$$(f', g') \circ (f, g) \coloneqq (f' \circ f, g' \circ g)\ .$$

- Les identités sont définies par les paires d'identités :

$$\mathrm{id}_{(E,F)} \coloneqq (\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_F)\ .$$

Exemple 11. Dans l'exemple suivant, on omet de représenter les flèches identités pour plus de clarté.

$$\begin{array}{cc} \mathscr{C} & \mathscr{D} \\ \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \arrow[ul] \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} b & a \arrow[l] \end{tikzcd} \end{array}$$

$$\mathscr{C} \times \mathscr{D}$$

$$\begin{tikzcd}
& & & (1,a) \arrow[dll] \arrow[ddl] \arrow[dddlll] & \\
& (1,b) \arrow[ddl] & & & \\
& & (2,a) \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dll] & & (3,a) \arrow[uul] \arrow[ulll] \arrow[dll] \\
(2,b) \arrow[rr] & & (3,b) \arrow[uul] & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration est automatique en posant bien les choses. On la laisse donc aux soins du lecteur ou de la lectrice. □

1.2.6. *Catégorie opposée.* Lorsqu'on a une catégorie, on peut avoir envie, tout d'un coup, de changer l'orientation de toutes les flèches. Il se trouve que c'est possible et que cela donne bien une catégorie.

Définition 8 (Catégorie opposée). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ la *catégorie opposée* formée des données suivantes.

- $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} \coloneqq \mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$.
- Pour tout morphisme $f : X \to Y$ de la catégorie $\mathscr{C}$, on considère un morphisme dit *opposé* $f^{\mathrm{op}} : Y \to X$ dans $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.
- La composition de deux morphismes $f^{\mathrm{op}} : Y \to X$ et $g^{\mathrm{op}} : Z \to Y$ est définie par le morphisme opposé du composé dans la catégorie $\mathscr{C}$:

$$f^{\mathrm{op}} \circ_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} g^{\mathrm{op}} \coloneqq (g \circ_{\mathscr{C}} f)^{\mathrm{op}}\ .$$

- Les identités de la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ sont les (opposées des) identités de la catégorie $\mathscr{C}$.

Exemple 12. La catégorie opposée de la catégorie $\mathscr{C}_{[n]} = 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n$ est la catégorie

$$\mathscr{C}_{[n]}^{\mathrm{op}} = n \to \cdots \to 3 \to 2 \to 1 \ .$$

1.2.7. *Sous-catégories.*

Définition 9 (Sous-catégorie). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Une catégorie $\mathscr{S}$ est une *sous-catégorie* de $\mathscr{C}$ (noté $\mathscr{S} \subset \mathscr{C}$) si

- chaque élément de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}}$ est aussi dans $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$,
- chaque morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(X, Y)$ est également dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$,
- la composition des morphismes de la catégorie $\mathscr{S}$ est donnée par la composition des morphismes de la catégorie $\mathscr{C}$,
- les identités de $\mathscr{S}$ sont celles de $\mathscr{C}$, pour les éléments de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}}$.

Exemple 13. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie faite des objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}} \coloneqq \{a, b, c, d, e\}$ et des morphismes suivants (en ajoutant les identités) :

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d] & \\
 & b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
c \arrow[dr] & & d \\
 & e &
\end{tikzcd}$$

On considère la sous-catégorie $\mathscr{S}$ faite des objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}} \coloneqq \{a, b, d\}$ et des morphismes suivants (en ajoutant les identités) :

$$a \longrightarrow b \longrightarrow d$$

Proposition 4. *Toute sous-catégorie $\mathscr{S}$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ vérifie $\mathscr{S}^{\mathrm{op}} \subset \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.*

Démonstration.

- Les éléments de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ sont les mêmes que $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et les éléments de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}^{\mathrm{op}}}$ sont les mêmes que $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}}$. Ces derniers étant dans $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$, les objets de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}^{\mathrm{op}}}$ sont aussi dans $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et par conséquent dans $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.
- Comme les morphismes de $\mathscr{S}$ sont dans $\mathscr{C}$, en passant à l'opposé on a que les morphismes opposés de ceux de $\mathscr{S}$ sont aussi des morphismes opposés de ceux de $\mathscr{C}$, donc les morphismes de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}^{\mathrm{op}}}$ sont des morphismes de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.
- De la même manière, on voit que la composition des morphismes de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}^{\mathrm{op}}}$ est induite par la composition des morphismes de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.
- Encore de la même manière, les identités de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{S}^{\mathrm{op}}}$ sont celles de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.

□

1.2.8. *Intersection de sous-catégories.*

Définition-Proposition 6 (Intersection de sous-catégories). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et soient $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ deux sous-catégories $\mathscr{S} \subset \mathscr{C}$, $\mathscr{S}' \subset \mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$. On appelle *intersection* de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ (notée $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$) est la sous-catégorie de C telle que :

- les objets de $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ sont les objets de $\mathscr{C}$ étant à la fois dans $\mathscr{S}$ et dans $\mathscr{S}'$,
- Les morphismes de X vers Y dans $\mathscr{S} \cap \mathscr{S}'$ sont les morphismes de X vers Y de $\mathscr{C}$ à la fois présents dans $\mathscr{S}$ et dans $\mathscr{S}'$,

- les compositions et identités sont celles de $\mathscr{C}$ pour les éléments de $\mathrm{Obj}_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'}$.

Démonstration. La catégorie $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est bien une sous-catégorie de $\mathscr{C}$: la composée de deux morphismes de $\mathcal{S}$ (respectivement de $\mathcal{S}'$) est un morphisme de $\mathcal{S}$ (respectivement de $\mathcal{S}'$). □

1.3. **Les catégories en informatique**. Les catégories sont utilisées en informatique pour les mêmes raisons qu'en mathématiques : on veut prendre du recul sur les structures que l'on utilise (en programmation, en logique, en théorie des automates, *etc.*) et comprendre ce qui les relie, de maniére abstraite et axiomatique. Parfois, l'influence des catégories se retrouve directement dans les outils informatiques : en programmation fonctionnelle on parle explicitement de foncteurs et de monades ! Dans cette section, on voit seulement quelques exemples de base.

Exemple 14 (Une catégorie de types et de programmes en OCaml). En OCaml (par exemple), on peut voir un programme comme un morphisme allant d'un type «entrée» à un type «sortie». On aurait envie de construire une catégorie, mais c'est difficile à formaliser mathématiquement. En effet, pour composer deux programmes, on va utiliser une opération telle que

```
(* Composition *)
let compose (f : 'a -> 'b) (g : 'b -> 'c) (x : 'a) : 'c = g (f x)
```

et l'identité pourrait être donnée par

```
(* Élément neutre *)
let neutral_element (x : 'a) : 'a = x
```

Problème : si on compose `g : int -> bool` avec l'identité, on obtient un programme qui envoie `x : 'int` sur

`neutral_element (g x)`.

Ce n'est pas le même programme que g, bien qu'ils se comportent de la même façon sur toutes les entrées.

Pour éviter le problème de l'exemple précédent, on pourrait considérer les programmes modulo une relation d'équivalence : identifie deux programmes qui se comportent de la même façon sur toutes les entrées. Mais souvent, il est plus naturel et intéressant de chercher des modèles mathématiques représentant les programmes de maniére plus abstraite. Par exemple, pour un langage trés simple qui ne permet que d'appeler `print` et des fonctions ensemblistes (disons, `+` et `*` sur les entiers, `&` et `||` sur les booléens), on peut considérer la catégorie suivante.

Exemple 15. Soit string l'ensemble des chaînes de caractères. La catégorie $\mathscr{E}ns_{\text{print}}$ est définie comme suit :

- Objets : les mêmes objets que $\mathscr{E}ns$, c'est-à-dire tous les ensembles.
- Flèches (Morphismes) : $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns_{\text{print}}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns}(A, B\times \mathrm{string})$.
- Composition : Pour chaque paire de flèches $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on a des applications $f : A \to B\times\mathrm{string}$ et $g : B \to C\times\mathrm{string}$, et leur composition est donnée par le morphisme suivant :

$$A \xrightarrow{\ f\ } B\times\mathrm{string} \xrightarrow{g\times\mathrm{id}_{\mathrm{string}}} C\times\mathrm{string}\times\mathrm{string} \xrightarrow{\mathrm{id}_C\times\mathrm{concat}} C\times\mathrm{string}$$

- Identité : $\mathrm{id}_A : A \to A\times\mathrm{string}$, définie par $\mathrm{id}_A(a) = (a,\epsilon)$, où ϵ est la chaîne de caractères vide.

(On a utilisé la fonction $\mathrm{concat} : \mathrm{string}\times\mathrm{string} \to \mathrm{string}$ qui prend deux chaînes de caractères s et r en entrée et les concaténant pour former la chaîne st. La composition des flèches dans cette catégorie est associative car la concaténation des chaines est associative. De plus, l'identité agit comme l'élément unitaire pour la composition, c'est-à-dire que la composition d'une flèche avec l'identité ne change pas la flèche elle-même.

Enfin, on observe qu'on peut construire une catégorie à partir d'un automate.

Exemple 16. Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate fini déterministe où :

$$\begin{aligned} Q &: \text{ensemble d'états,} \\ \Sigma &: \text{ensemble de symboles d'alphabet,} \\ \delta &: Q \times \Sigma \to Q \text{ est la fonction de transition,} \\ q_0 &: \text{état initial,} \\ F &: \text{ensemble d'états finaux.} \end{aligned}$$

On note δ^* l'extension de δ qui permet des transitions multiples : c'est une fonction $Q \times \Sigma^* \to Q$.

Définition 10 (Catégorie induite un automate). La *catégorie induite par l'automate* A est définie par les données suivantes.

- Objets : les objets de la catégorie sont les états de l'automate Q.
- Flèches : les flèches de la catégorie représentent les transitions définies par la fonction de transition δ. Un morphisme de q à q' est un mot $s \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(q, s) = q'$.
- Composition : la composition des flèches est définie par la concaténation des étiquettes des transitions. Si f est une flèche de l'état q à q' avec l'étiquette $s \in \Sigma^*$, et g est une flèche de l'état q' à q'' avec l'étiquette $t \in \Sigma^*$, alors la composition $g \circ f$ est la flèche de l'état q à q'' ayant l'étiquette st.
- Identité : Pour chaque état q de l'automate, il existe une flèche identité $\mathrm{id}_q : q \to q$ avec l'étiquette ϵ.

1.4. **Propriétés des morphismes.**

1.4.1. *Isomorphismes.* La notion d'isomorphisme est fondamentale en théorie des catégories. Elle représente une équivalence spéciale entre deux objets d'une catégorie. Pour que deux objets, A et B, soient considérés comme isomorphes, il doit exister deux morphismes, f de A vers B et g de B vers A, tels que les deux compositions $g \circ f$ et $f \circ g$ correspondent aux morphismes identité sur A et B, respectivement. Intuitivement, si on va de A à B en suivant f, puis de B à A en suivant g, on se retrouve au même point dans A, et inversement quand on part de B. Dans ce cas, f et g sont des morphismes inverses l'un de l'autre.

Définition 11 (Isomorphisme). Dans une catégorie $\mathscr{C}$, deux objets A et B sont dits *isomorphes* s'il existe deux morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to A$ tels que les compositions $f \circ g$ et $g \circ f$ soient respectivement égales aux morphismes d'identité des objets A et B, c'est-à-dire :

$$f \circ g = \mathrm{id}_A \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_B \ .$$

Dans ce cas, on appelle f et g des *isomorphismes.*

Les équations ci-dessus sont représentées par les *diagrammes commutatifs* suivants :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

1.4.2. *Monomorphismes et applications injectives.* Dans ce qui suit, on introduit la notion de monomorphisme, qui est une propriété de certains morphismes dans une catégorie. L'objectif est d'exprimer de manière abstraite ce qui caractérise les applications injectives dans la catégorie des ensembles. On rappelle la définition.

Définition 12 (Application injective). Soient A et B des ensembles. Une application $f : A \to B$ est *injective* si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

On cherche maintenant a généraliser cette définition. On remarque que, si A est un objet de la catégorie des ensembles, alors les éléments de A correspondent précisément aux morphismes $1 \to A$, où 1 est un ensemble singleton fixé. On peut donc ré-exprimer l'injectivité d'une application de la maniére suivante.

Proposition 5. *Une fléche $f : A \to B$ dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ est une application injective si et seulement si, étant donné deux flèches $x : 1 \to A$ et $y : 1 \to A$, on a*

$$f \circ x = f \circ y \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Démonstration. Il suffit d'observer que la flèche $f \circ x : 1 \to B$ correspond bien à l'élement $f(x)$. □

Étant donné une catégorie quelconque, on n'a pas forcément accès à un ensemble singleton qui joue le rôle de l'objet 1 dans la proposition précédente. On va voir qu'il suffit de remplacer 1 par un quantificateur sur tous les objets X de la catégorie.

Définition 13 (Monomorphisme). Un *monomorphisme* (ou simplement un *mono*) est un morphisme f tel que pour tous les objets X et tous les morphismes g_1 et $g_2 : X \to A$, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, alors $g_1 = g_2$. En d'autres termes, si deux morphismes g_1 et g_2 de X vers A donnent le même résultat lorsqu'ils sont composés avec f, alors g_1 et g_2 sont égaux.

Nous allons maintenant prouver que dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$, les monomorphismes sont précisément les applications injectives.

Proposition 6. *Dans la catégorie $\mathcal{E}ns$, toute flèche $f : A \to B$ vérifie :*

$$f \text{ est une application injective} \iff f \text{ est un monomorphisme.}$$

Démonstration.

($\Leftarrow$) Supposons que $f : A \to B$ soit un monomorphisme. Nous voulons montrer que f est injective. Soient x et y deux éléments distincts de l'ensemble A tels que $f(x) = f(y)$. Dans la catégorie des ensembles, on appelle g et h les morphismes de $\{1\}$ vers A définis par $g(1) = x$ et $h(1) = y$. Puisque $f(x) = f(y)$, on a $f \circ g(1) = f \circ h(1)$, et donc $f \circ g = f \circ h$. Puisque f est un mono, on obtient que $g = h$ et donc que $x = y$.

($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que $f : A \to B$ soit une fonction injective. Nous devons montrer que f est un monomorphisme. Soit X un objet quelconque et $h, k : X \to A$ deux morphismes tels que $f \circ h = f \circ k$. Pour tout $x \in X$, on a $f(h(x)) = f(k(x))$ et donc, puisque f est injective, $h(x) = k(x)$. On en conclut que $h = k$.

Ainsi, dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$, les monomorphismes sont précisément les applications injectives. □

Dans certaines catégories, il existe une notion plus forte que celle des monomorphismes, appelée monomorphisme fort.

Définition 14 (Monomorphisme fort). Un morphisme $f : A \to B$ est un *monomorphisme fort* s'il existe un morphisme $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A .
\end{tikzcd}$$

Proposition 7. *Tout monomorphisme fort est un monomorphisme.*

Démonstration. Supposons que $f : A \to B$ soit un monomorphisme fort, et considérons deux morphismes h et $k : X \to A$ tels que $f \circ h = f \circ k$. On a :

$$\begin{aligned} & f \circ h = f \circ k \\ & \quad \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ k \\ & \quad \Rightarrow \mathrm{id} \circ h = \mathrm{id} \circ k, \end{aligned}$$

et donc f est bien un monomorphisme. □

Définition-Proposition 7 (Sous-catégorie des monomorphismes). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie donnée. On peut définir une sous-catégorie $\mathscr{C}_{\text{mono}}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathscr{C}$, mais dont les morphismes sont seulement les monomorphismes de $\mathscr{C}$. Les idéntités et la composition sont les mêmes que dans $\mathscr{C}$.

Démonstration. L'identité d'un objet dans n'importe quelle catégorie est toujours un monomorphisme. En effet, pour tout objet X et pour tous morphismes $h, k : X \to A$, si $\mathrm{id}_A \circ h = \mathrm{id}_A \circ k$, alors $h = k$. Par conséquent, l'identité est un morphisme dans la catégorie $\mathscr{C}_{\text{mono}}$.

Il nous reste à montrer que la composition de deux morphismes dans $\mathscr{C}_{\text{mono}}$ est bien définie, c'est-à-dire que si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux monomorphismes (dans $\mathscr{C}$), alors $g \circ f$ est aussi un monomorphisme. Considérons deux morphismes $h : X \to A$ et $k : X \to A$ tels que $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. En utilisant l'associativité de la composition, nous obtenons $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$. Puisque g est un monomorphisme, nous pouvons conclure que $f \circ h = f \circ k$. Et puisque f est également un monomorphisme, cela implique que $h = k$. □

Pour terminer, on observe la propriété suivante :

Proposition 8. *Si $\pi = (E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné, alors* tous *les morphismes de la catégorie associée $\mathscr{C}_\pi$ sont des monomorphismes.*

Démonstration. On rappelle (*cf.* Définition 1) qu'il existe au plus un morphisme entre deux objets de $\mathscr{C}_\pi$. Donc, pour tout morphisme $f : x \to y$, la condition à vérifier pour montrer que f est un monomorphisme est triviale. □

1.4.3. *Épimorphismes et applications surjectives.* Dans la section qui suit, on étudie une autre classe de morphismes : les épimorphismes. On va voir qu'ils sont obtenus de manière duale aux monomorphismes, et permettent de généraliser la notion d'application surjective dans la catégorie des ensembles.

On rappelle que, si $f : A \to B$ est une flèche dans une catégorie $\mathscr{C}$, alors on peut également voir f comme une flèche $B \to A$ dans la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\text{op}}$. Pour éviter toute ambiguité on appelle cette deuxiéme flèche f^{op}.

Définition 15 (Épimorphisme : définition par dualité). Une flèche $f : A \to B$ est un *épimorphisme* (ou *épi*) dans une catégorie $\mathscr{C}$ si la fléche f^{op} est un monomorphisme dans la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\text{op}}$.

Proposition 9 (Épimorphisme : caractérisation directe). *Un morphisme $f : A \to B$ dans une catégorie est un épimorphisme si et seulement si, pour tout objet Z et pour tout couple de morphismes $h, k : B \to Z$ tels que $h \circ f = k \circ f$, alors $h = k$.*

Démonstration. Il suffit d'étudier la propriété des monomorphismes dans $\mathscr{C}^{\text{op}}$. La flèche $f^{\text{op}} : B \to A$ est un mono si, pour tout objet Z et pour toute paire de morphismes $h^{\text{op}}, k^{\text{op}} : Z \to B$, $f^{\text{op}} \circ h^{\text{op}} = f^{\text{op}} \circ k^{\text{op}}$ implique $h^{\text{op}} = k^{\text{op}}$. Mais la composition dans $\mathscr{C}^{\text{op}}$ est celle de $\mathscr{C}$ vue à l'envers, donc la propriété correspond à dire que, pour toute paire de morphismes $h, k : B \to Z$ dans $\mathscr{C}$, si $h \circ f = k \circ f$ alors $h = k$. □

On montre maintenant que, dans les ensembles, les épimorphismes sont les applications surjectives, dont on rappelle la définition.

Définition 16 (Application surjective). Soit $f : A \to B$ une application ensembliste. On dit que f est *surjective* si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Proposition 10. *Dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles, tout morphisme $f : A \to B$ vérifie :*

$$f \text{ est un épimorphisme} \iff f \text{ est surjective.}$$

Démonstration. Démontrons l'implication dans les deux sens.

($\Rightarrow$) Supposons que f soit un épimorphisme. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément $b \in B$ pour lequel il n'existe pas d'élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On note $1_{\mathrm{Im}(A)} : B \to \{0, 1\}$ la fonction indicative du sous-ensemble $\mathrm{Im}(A)$, et on construit une fonction $h : B \to \{0, 1\}$ comme suit :

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = b\,, \\ 1_{\mathrm{Im}(A)}(y) & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

On a donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "1_{\mathrm{Im}(A)}"'] & \{0,1\} \end{tikzcd} .$$

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (h \circ f)(a) &= h(f(a)) = h(b) = 1 && \text{si } f(a) = b\,, \\ (h \circ f)(a) &= h(f(a)) = 1_{\mathrm{Im}(A)}(f(a)) && \text{si } f(a) \neq b\,, \end{aligned}$$

et donc

$$(1_{\mathrm{Im}(A)} \circ f)(a) = 1_{\mathrm{Im}(A)}(f(a))\,.$$

Puisqu'il n'existe pas de a tel que $f(a) = b$, on a que, pour tout $a \in A$, $(h \circ f)(a) = (1_{\mathrm{Im}(A)} \circ f)(a)$, et donc $h \circ f = 1_{\mathrm{Im}(A)} \circ f$. Puisque f est un épi, on doit donc avoir $h = 1_{\mathrm{Im}(A)}$, une contradiction. Ainsi, notre hypothèse selon laquelle il existe un élément $b \in B$ pour lequel il n'existe pas d'élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$ est incorrecte, et par conséquent, f est surjective.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que f soit surjective. Pour montrer que f est un épimorphisme, prenons deux morphismes $h, k : B \to Z$ pour un objet Z. Supposons que $h \circ f = k \circ f$. Nous devons montrer que $h = k$. Pour tout $y \in B$, puisque f est surjective, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$, et par conséquent

$$h(y) = h(f(x)) = k(f(x)) = k(y).$$

Donc $h = k$ et f est un épi. □

Exemple 17. Considérons l'application de projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dans la catégorie des espaces vectoriels définie par

$$\pi_1(x, y) = x\,.$$

Montrons que c'est un épimorphisme. Soit $f, g : \mathbb{R} \to V$ deux applications linéaires vers un espace vectoriel V telles que $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f(x) = f(\pi_1(x, 0)) = (f \circ \pi_1)(x, 0) = (g \circ \pi_1)(x, 0) = g(\pi_1(x, 0)) = g(x)\,.$$

Ainsi, $f = g$, ce qui montre que π_1 est un épimorphisme dans la catégorie des espaces vectoriels.

Remarque. Cet exemple peut être adapté pour montrer que, pour toute catégorie «concrètes» (dans le sens où les morphismes sont des applications ensemblistes), tout morphisme correspondant à une application surjective est un épi. La réciproque n'est pas vraie en général.

Définition-Proposition 8 (Sous-catégorie des épimorphismes). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. La *sous-catégorie des épimorphismes* de $\mathscr{C}$, notée $\mathscr{C}_{\text{epi}}$, est la sous-catégorie de $\mathscr{C}$ définie par les données suivantes.

- Les objets de $\mathscr{C}_{\text{epi}}$ sont les mêmes que ceux de $\mathscr{C}$.
- Pour chaque paire d'objets A et B de $\mathscr{C}$, si $f : A \to B$ est une flèche (morphisme) dans $\mathscr{C}$ et que f est un épimorphisme dans $\mathscr{C}$, alors f est également une flèche dans $\mathscr{C}_{\text{epi}}$.
- La composition des flèches dans $\mathscr{C}_{\text{epi}}$ est la même que celle de $\mathscr{C}$.
- Les flèches «identité» dans $\mathscr{C}_{\text{epi}}$ sont les mêmes que celles de $\mathscr{C}$.

Démonstration. La démonstration est similaire est celle de la définition/proposition 7. Elle s'obtient formellement à partir de celle-ci en passant à la catégorie opposée. ◻

Définition 17 (Épimorphisme fort). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un *épimorphisme fort* dans $\mathscr{C}$ est une flèche $f : A \to B$ telle qu'il existe un $g : B \to A$ avec $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\exists g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposition 11. *Tout épimorphisme fort est un épimorphisme.*

Démonstration. On commence par observer que f est un épimorphisme fort si et seulement si f^{op} est un monomorphisme fort dans $\mathscr{C}^{\text{op}}$. Par la Proposition 7, f^{op} est un monomorphisme, et donc, par définition, f est un épimorphisme. ◻

1.4.4. *Relation monomorphismes-épimorphismes-isomorphismes.*

Proposition 12. *Tout isomorphisme d'une catégorie est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.*

Démonstration. C'est un corollaire direct des propositions 7 et 11 : un isomorphisme est un monomorphisme fort et un épimorphisme fort. ◻

Remarque. La réciproque est en général fausse, voici un contre-exemple. On considère l'application «identité» $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \mathrm{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathrm{T})$ qui envoie un nombre réel sur lui-même mais où on considère la topologie discrète $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ à la source et de la topologie «usuelle» T au but.

Pour rappel, la catégorie $\mathscr{Top}$ des espaces topologiques est composée des données suivantes :

- les objets $\mathrm{Obj}_{\mathscr{Top}}$ sont les espaces topologiques,
- les flèches $\mathrm{Flech}_{\mathscr{Top}}$ sont les applications continues, c'est-à-dire les applications ensemblistes $f : (X, \mathrm{S}) \to (Y, \mathrm{T})$ qui vérifient : $\forall O \in \mathrm{T}$ ouvert de Y, $f^{-1}(O) \in \mathrm{S}$ est un ouvert de X .

Par définition, l'application «identité» id est continue ; comme elle est injective et surjective, c'est un monomorphisme et un épimorphisme. Si elle admettait un morphisme inverse, cela serait une application continue $g\colon (\mathbb{R}, \mathrm{T}) \to (\mathbb{R}, \mathrm{P}(\mathbb{R}))$.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}, \mathrm{P}(\mathbb{R})) \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}"] & (\mathbb{R}, \mathrm{T}) \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Mais le fait d'être l'inverse de l'application «identité» impliquerait que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, cette application là n'est pas continue car, par exemple, $g^{-1}(]0, 1]) =]0, 1]$. Or, on a bien que $]0, 1]$ est un ouvert pour la topologie discrète de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un ouvert pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Remarque. Dans la catégorie $\mathcal{Top}$ des espaces topologiques, les isomorphismes sont les *homéomorphismes*, c'est-à-dire les applications continues $f : X \to Y$ qui vérifient :

$$\exists g : Y \to X \text{ continue }, \ f \circ g = \mathrm{id}_Y \text{ et } g \circ f = \mathrm{id}_X \ .$$

Proposition 13. *Dans une catégorie concrète, tout morphisme surjectif est un épimorphisme et tout morphisme injectif est un monomorphisme.*

Démonstration. On rappelle que nous n'avons pas (encore) de définition formelle de «catégorie concrète». Regardons tout de même ce qui se passe lorsque les morphismes d'une catégorie $\mathscr{C}$ sont des applications ensemblistes avec des propriétés supplémentaires.

Soit $f : X \to Y \in \mathrm{Flech}_{\mathscr{C}}$ un morphisme dont son application sous-jacente est surjective. Soient $k_1, k_2 : Y \to Z$ deux morphismes de $\mathscr{C}$ tels que $k_1 \circ f = k_2 \circ f$. On cherche à montrer que $k_1 = k_2$, c'est-à-dire $k_1(y) = k_2(y)$, pour tout $y \in Y$. Soit $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ car f est surjective. Or $k_1(y) = k_1(f(x)) = k_2(f(x)) = k_2(y)$, donc $k_1 = k_2$. On a bien que f est un épimorphisme.

Soit $f : X \to Y \in \mathrm{Flech}_{\mathscr{C}}$ un morphisme dont son application sous-jacente est injective. Soient $k_1, k_2 : Z \to X$ deux morphismes de $\mathscr{C}$ tels que $f \circ k_1 \circ = f \circ k_2$. On cherche à montrer que $k_1 = k_2$, c'est-à-dire $k_1(z) = k_2(z)$, pour tout $z \in Z$. Pour tout $z \in Z$, on a $f \circ k_1(z) = f \circ k_2(z)$, c'est-à-dire $f(k_1(z)) = f(k_2(z))$ Par injectivité de f, on obtient $k_1(z) = k_2(z)$, pour tout $z \in Z$. On a donc $k_1 = k2$ et f est un monomorphisme. □

Contrexemple. Attention la réciproque est fausse en général ; nous donnons ici un exemple d'épimorphisme qui n'est pas surjectif. On se place dans la catégorie $\mathcal{Top}$ des espaces topologiques. Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'application continue qui injecte $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (munis respectivement de leurs topologies usuelles). Soient $k_1, k_2 : \mathbb{R} \to Z$ deux applications telles que $k_1 \circ f = k_2 \circ f$. Comme $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, les deux applications continues k_1 et k_2 qui sont égales sur $\mathbb{Q}$ le sont également sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a bien que le morphisme f un épimorphisme. Prenons maintenant $y = \sqrt{3}$ par exemple, comme y n'a aucun antécédent par f, l'application f n'est pas surjective.

1.4.5. *Caractérisation des monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes dans les catégories concrètes.*

Proposition 14. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite, les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme.

ii) Pour tout objet C de $\mathscr{C}$, l'application «poussé-en-avant» $f_* : \mathscr{C}(C, X) \to \mathscr{C}(C, Y)$ définie par

$$(g : C \to X) \xmapsto{f_*} (f \circ g : C \to Y)$$

est injective.

Démonstration.

$i) \implies ii)$: Supposons que $f : X \to Y$ soit un monomorphisme. Soit C un objet de $\mathscr{C}$ et soient $g_1, g_2 : C \to X$ deux morphismes de $\mathscr{C}$. Considérons l'application «poussé-en-avant» f_* associée à f. Nous allons montrer qu'elle est injective. Pour cela, nous supposons que $f_*(g_1) = f_*(g_2)$, ce qui est équivalent à dire que $f \circ g_1 = f \circ g * 2$. Ceci implique que $g_1 = g_2$, car f est un monomorphisme. Donc, l'application f_* est injective.

$ii) \implies i)$: Soit C un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que l'application «poussé-en-avant» f_* associée à un morphisme $f : X \to Y$ est injective. Montrons que f est un monomorphisme. Soient $g_1, g_2 : C \to X$ deux morphismes de la catégorie $\mathscr{C}$. Supposons que $f \circ g_1) = f \circ g_2$. Par définition de l'application «poussé-en-avant» f_*, on a $f_*(g_1) = f \circ g_1$ et $f_*(g_2) = f \circ g_2$. Et son injectivité implique que $g_1 = g_2$. On a bien que f est un monomorphisme.

□

Proposition 15. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite, les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) Un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme.

ii) Pour tout objet C de $\mathscr{C}$, l'application «tiré-en-arrière» $f^* : \mathscr{C}(Y, C) \to \mathscr{C}(X, C)$ définie par

$$(g : Y \to C) \overset{f^*}{\longmapsto} (g \circ f : X \to C)$$

est injective.

Démonstration.

$i) \implies ii)$: Supposons que $f : X \to Y$ soit un épimorphisme. Soit C un objet de $\mathscr{C}$ et soient $g_1, g_2 : Y \to C$ deux morphismes de $\mathscr{C}$. Considérons l'application «tiré-en-arrière» f^* associée à f. Nous allons montrer qu'elle est injective, pour cela on suppose que $f^*(g_1) = f^*(g_2)$. Ceci est équivalent à dire que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Comme f est est un épimorphisme, cela implique que $g_1 = g_2$ et donc l'application f^* est injective.

$ii) \implies i)$: Soit C un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que l'application «tiré-en-arrière» f^* associée à un morphisme $f : X \to Y$ est injective. Montrons que f est un épimorphisme. Soient $g_1, g_2 : Y \to C$ deux morphismes de la catégories $\mathscr{C}$. Supposons que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Ce qui est équivalent à dire que $f^*(g_1) = f^*(g_2)$. Par injectivité de f^*, on a bien $g_1 = g_2$ et donc f est un épimorphisme.

□

Proposition 16. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite, les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) Un morphisme $f : X \to Y$ est un isomorphisme.

ii) Pour tout objet C de $\mathscr{C}$, l'application «poussé-en-avant» $f_* : \mathscr{C}(C, X) \to \mathscr{C}(C, Y)$ définie par

$$(g : C \to X) \overset{f_*}{\longmapsto} (f \circ g : C \to Y)$$

est bijective.

Démonstration.

$i) \implies ii)$: Soit $f : X \to Y$ un isomorphisme, c'est -à-dire $\exists g : Y \to X$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Soit C un objet de $\mathscr{C}$, montrons que l'application «poussé-en-avant» $f_* : \mathscr{C}(C, X) \to \mathscr{C}(C, Y)$ est bijective. Pour cela, on affirme que l'application «poussé-en-avant» g_* associée au morphisme g est l'inverse de f_* . En effet, pour tout $h : C \to X$, on a $(g_* \circ f_*)(h) = g \circ f \circ h = h$ et, pour tout $j : C \to Y$, on a $(f_* \circ g_*)(j) = f \circ g \circ j = j$. Donc f_* est bijective.

$ii) \implies i)$: Supposons que l'application «poussé-en-avant» f_* associée à un morphisme $f : X \to Y$ soit bijective et montrons que f est un isomorphisme. On cherche un morphisme $g : Y \to X$ de $\mathscr{C}$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Considérons $C = Y$, comme l'application $f_* : \mathscr{C}(Y, X) \to \mathscr{C}(Y, Y)$ est bijective, elle est en particulier surjective et donc il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f_*(g) = \mathrm{id}_Y$, c'est-à-dire tel que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Il reste à montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Pour cela, on commence par remarquer que $f_*(g \circ f) = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f$. En outre, on a $f_*(\mathrm{id}_X) = f \circ \mathrm{id}_X = f$. Et comme l'application $f_* : \mathscr{C}(X, X) \to \mathscr{C}(X, Y)$ est bijective, elle est en particulier injective, ce qui implique $g \circ f = \mathrm{id}_X$. En conclusion, le morphisme f est bien un isomorphisme.

□

1.5. **Produits et coproduits**.

1.5.1. *Produits classiques.* Le concept de «produit» est une notion fondamentale que l'on rencontre fréquemment dans différentes structures, qu'elles relèvent de l'algèbre ou de l'informatique.

- Quand on étudie les ensembles, on a le produit cartésien.
- Quand on étudie les corps, on définit le produit de deux corps K et L, noté $\mathrm{K} \times \mathrm{L}$, comme un corps où les opérations de base (addition et multiplication) sont définies composante par composante. Peuvent être définis de la même façon les produits de groupes, d'anneaux, d'espaces vectoriels.

- En OCaml, qui est un langage de programmation fonctionnelle, le produit int $*$ string définit le type des tuples (tuple = regroupement ordonné de valeurs) composés d'un entier de type '*int*' et d'une chaine de caractère de type '*string*'.

Au niveau de ces «produits», on retrouve souvent cette idée de combiner des objets de façon struturée, générant ainsi des entités ayant leurs propres propriétés. Nous allons voir qu'il est possible d'appliquer cette notion de produit à une échelle plus large.

1.5.2. *Exemple motivant : produit cartésien dans les ensembles.* Soient A et B deux ensembles. Le ***produit cartésien*** de A et B, noté $A \times B$, est défini par l'ensemble des couples ordonnés (a, b) tels que a appartient à A et b appartient à B. Formellement :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Sont définies par la même occasion les applications «projections» :

$$p_A : A \times B \to A, \quad p_A(a, b) := a,$$

$$p_B : A \times B \to B, \quad p_B(a, b) := b.$$

Analysons cette définition du produit cartésien et partons de l'idée selon laquelle :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \exists!(a, b) \in A \times B.$$

En termes catégoriques, cela donne :

$$\forall f : \{*\} \to A,\ \forall g : \{*\} \to B,\ \exists! h : \{*\} \to A \times B$$

tel que

$$p_A \circ h = f \quad \text{et} \quad p_B \circ h = g$$

Le diagramme suivant résume la situation ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} & \{*\} \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

1.5.3. *Définition générale.* On va à présent rendre plus abstraite la notion de produit, en la généralisant à une catégorie quelconque.

Définition 18 (Produit dans une catégorie). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie (arbitraire) et soient A, B appartenant à $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Un objet P de $\mathscr{C}$ muni de morphismes $p_A : P \to A$ et $p_B : P \to B$ est un ***produit*** de A et B dans $\mathscr{C}$ si pour tout objet $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, et pour toute paire de flèches $X \xrightarrow{f} A$ et $X \xrightarrow{g} B$, il existe une unique flèche $X \xrightarrow{h} P$ telle que $p_A \circ h = f$ et $p_B \circ h = g$. En forme diagrammatique, on a :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\ A & & B. \end{tikzcd}$$

Remarque. Les morphismes p_A et p_B, appelés ***projections***, sont en effet des *données* et doivent être définies pour que la notion de produit puisse avoir un sens.

Remarque. Le produit P, s'il existe, est souvent noté $A \times B$, et on écrit $h = \langle f, g\rangle$. On va voir qu'il est légitime d'utiliser l'expression «le» produit, car leur définition rend les produits uniques à isomorphisme près.

Proposition 17. *(Produits dans $\mathscr{Ens}$) Soit A et B deux objets de $\mathscr{Ens}$. Le produit cartésien $A\times B$ est un produit catégorique de A et B.*

Démonstration.

Existence: Soit X un ensemble. Si les fonctions $f : X \to A$ et $g : X \to B$ sont définies, alors la fonction $h : X \to A \times B$ tel que $\forall x \in X,\ h(x) = (f(x), g(x))$ est bien définie.

Unicité: Il suffit de remarquer que pour n'importe quelle fonction $h : X \to A \times B$, on a $h(x) = (p_A(h(x)), p_B(h(x)))$ pour tout $x \in X$. Donc si $h, h' : X \to A \times B$ satisfont la propriété de la définition, alors pour tout $x \in X$, $h(x) = (f(x), g(x)) = h'(x)$.

□

1.5.4. *Propriétés des produits.* On montre d'abord que les produits sont «stables par isomorphisme». En d'autres termes, un objet isomorphe à un produit donne un autre produit.

Proposition 18 (Stabilité à isomorphisme près). *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie arbitraire. Soient A, B des objets de $\mathscr{C}$, et soit (P, p_A, p_B) un produit de A et B. Si Q est un objet de $\mathscr{C}$ muni d'un isomorphisme $\rho : P \xrightarrow{\cong} Q$, alors Q est un produit dont les projections q_A et q_B sont définies comme suit :*

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, "\rho^{-1}"] & \\
P \arrow[d, "p_A"'] & & P \arrow[d, "p_B"] \\
A & & B.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On doit montrer que (Q, q_A, q_B) vérifie la propriété d'un produit. Prenons deux flèches $f : X \to A$ et $g : X \to B$, on doit montrer qu'il existe une unique flèche $h : X \to Q$ telle que $q_A \circ h = f$ et $q_B \circ h = g$.

Par définition du produit P, on sait que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe un unique morphisme $k : X \to P$ tel que $p_A \circ k = f$ et $p_B \circ k = g$. On définit $h = \rho \circ k$, et on a bien :

$$f = p_A \circ k = p_A \circ (\rho^{-1} \circ h) = (p_A \circ \rho^{-1}) \circ h = q_A \circ h.$$

Par un raisonnement similaire, on a $g = p_B \circ (\rho^{-1} \circ h) = q_B \circ h$. Il nous reste à montrer l'unicité de h. Supposons qu'il existe un autre morphisme $h' : X \to Q$ tel que $f = q_A \circ h'$ et $g = q_B \circ h'$. On peut alors construire deux flèches $\rho^{-1} \circ h$ et $\rho^{-1} \circ h' : X \to P$. On a :

$$P_A \circ (\rho^{-1} \circ h) = P'_A \circ h = P'_A \circ h' = f$$

$$P_B \circ (\rho^{-1} \circ h') = P'_B \circ h' = P'_B \circ h = g$$

mais, par définition du produit P, la flèche $X \xrightarrow{k} P$ vérifiant $P_A \circ k = f$ *et* $P_B \circ k = g$ est unique. On en conclut donc que $\rho^{-1} \circ h = \rho^{-1} \circ h'$ et donc que $h' = h$ puisque ρ^{-1} est un isomorphisme. L'argument est résumé par le diagramme suivant.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dddl, bend right, "f"'] \arrow[dddr, bend left, "g"] \arrow[dd, dashed, bend left, "k"] & \\
 & Q \arrow[d, bend right, "\rho^{-1}"'] & \\
 & P \arrow[u, bend right, "\rho"'] \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

□

Proposition 19. *Soient A , B, P et Q des objets de $\mathscr{C}$ tels que :*

- *P est un produit de A et B, muni de projections $p_A : P \to A$ et $p_B : P \to B$.*
- *Q est un produit de A et B, muni de projections $q_A : Q \to A$ et $q_B : Q \to B$.*

Alors il existe un isomorphisme entre P et Q.

Démonstration. On sait que P est un produit de A et B, on peut donc instancier la propriété du produit en prenant $X = Q$, $f = q_A$ et $g = q_B$, pour obtenir un unique morphisme $h : Q \to P$ tel que $p_B \circ h = q_B$ et $p_A \circ h = q_A$.

De la même manière, puisque Q est un produit de A et B, on obtient un unique morphisme k : $P \to Q$ tel que $q_B \circ k = p_B$ et $q_A \circ k = p_A$. On obtient les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
A & Q \arrow[l, "q_A"] \arrow[r, "q_B"'] \arrow[u, "h"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[d, "k"'] & \\
A & Q \arrow[l, "q_A"] \arrow[r, "q_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Pour montrer que P et Q sont isomorphes, on vérifie que $k \circ h = \mathrm{id}_Q$ et $h \circ k = \mathrm{id}_P$. En effet, puisque P est un produit, il existe un unique morphisme $P \to P$ faisant commuter le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[dd, dashed] & \\
A & & B. \\
 & P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Or on a les deux diagrammes commutatifs

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_P"'] & \\
A & & B \\
 & P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[d, "k"] & \\
A & Q \arrow[l, "q_A"] \arrow[r, "q_B"'] \arrow[d, "h"] & B \\
 & P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

et donc $h \circ k = \mathrm{id}_P$. De la même manière on montre que $k \circ h = \mathrm{id}_Q$, et ainsi que P et Q sont isomorphes. □

Pour deux objets A et B d'une catégorie $\mathscr{C}$ qui admettent un produit, on a écrire $A \times B \cong B \times A$. En termes plus précis :

Proposition 20. *Si A, B sont des objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ qui admettent un produit $(A \times B, p_A, p_B)$, alors $(A \times B, p_B, p_A)$ est un produit de B et A.*

Démonstration. La définition du produit est facilement vérifiée par le triplet $(A \times B, p_B, p_A)$: il suffit d'inverser l'ordre des morphismes f et g. □

1.5.5. *Lien avec l'objet terminal.* Pour terminer cette section, on définit la notion d'*objet terminal*, qui généralise le singleton dans les ensembles.

Définition 19 (Objet terminal). Dans une *catégorie* $\mathscr{C}$, un objet 1 est *terminal* s'il existe un unique morphisme $X \to 1$, pour tout objet X de $\mathscr{C}$.

Il est facile de vérifier que dans la catégorie $\mathscr{E}ns$ des ensembles, l'objet $\{*\}$ (ainsi que n'importe quel autre ensemble singleton) est terminal. Dans les ensembles, on a une bijection $A \times \{*\} \cong A$, ce qui se généralise de la manière suivante.

Proposition 21. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie possédant un objet terminal 1. Pour tout objet A de $\mathscr{C}$, le produit de A avec 1 existe et est donné par $A \times 1 \cong A$.*

Démonstration. Puisque les produits sont uniques á isomorphisme près, il suffit de montrer que A est un produit de A et 1. Les projections sont données par l'identité $\mathrm{id}_A : A \to A$ et l'unique morphisme $* : A \to 1$ vers l'objet terminal.

On vérifie la propriété du produit. Soit X un objet de $\mathscr{C}$ muni de morphismes $g : X \to 1$ et $f : X \to A$. On veut montrer qu'il existe un unique morphisme $k : X \to A$ tel que ce diagramme commute :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "k"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
& A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "*"] & \\
A & & 1
\end{tikzcd}$$

L'équation $\mathrm{id}_A \circ k = f$ donnée par le diagrame nous force à poser $k = f$. Il reste à montrer que la partie droite du diagramme commute, mais on a forcément $g = * \circ f$, car il s'agit de deux morphismes vers un objet terminal. □

1.5.6. *Coproduit d'objets dans une catégorie.* Dans la continuité de notre exploration de la théorie des catégories, après avoir examiné en détail la notion de produit de catégorie, nous nous tournons désormais vers un concept complémentaire fondamental : *le coproduit.* Le coproduit est un concept dual au produit : un coproduit est un produit dans la catégorie opposée ; en particulier les projections deviennent des injections.

Définition 20 (Coproduit). Dans une catégorie $\mathscr{C}$, un *coproduit* de deux objets A et B est un objet K muni d'*injections* $i_A : A \to K$ et $i_B : B \to K$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout objet X et pour tous morphismes $f : A \to X$ et $g : B \to X$, il existe un unique $h : K \to X$ tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& K \arrow[u, "h"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_A"'] & & B. \arrow[uul, bend right, "g"'] \arrow[ul, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Proposition 22. *Le coproduit de deux objets A et B dans la catégorie des ensembles est leur union disjointe, notée $A \sqcup B$. Ses éléments sont des paires $(1, a)$ pour chaque élément a de A et des paires $(2, b)$ pour chaque élément b de B :*

$$A \sqcup B = \{(1, a) \mid a \in A\} \cup \{(2, b) \mid b \in B\}.$$

Remarque. Si l'ensemble A a m éléments et l'ensemble B a n éléments, alors leur coproduit a $m + n$ éléments. Par exemple, le coproduit de $\{\text{chien}, \text{chat}, \text{souris}\}$ et $\{\text{chien}, \text{loup}, \text{ours}\}$ est l'ensemble $\{(1, \text{chien}), (1, \text{chat}), (1, \text{souris}), (2, \text{chien}), (2, \text{loup}), (2, \text{ours})\}$.

Démonstration. Soit $X \in \mathrm{Obj}_{\mathcal{E}ns}$ et soient $g : B \to X$ et $f : A \to X$ des morphismes. On définit un morphisme $h : A \sqcup B \to X$ comme suit :

$$h(z) = \begin{cases} f(a) & \text{si } z = (1, a) \\ g(b) & \text{si } z = (2, b). \end{cases}$$

Il reste à vérifier que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& A \sqcup B \arrow[u, "h"] & \\
A \arrow[ur, "i_A"'] \arrow[uur, bend left, "f"] & & B \arrow[ul, "i_B"] \arrow[uul, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

et que h est l'unique morphisme qui le fait commuter : on laisse cela au soin de la lectrice ou du lecteur. □

Exemple 18 (Coproduit d'anneaux).

Proposition 23. *Soient R et S deux anneaux. Leur coproduit dans la catégorie des anneaux est la somme directe $R \oplus S$, dont les opérations sont définies composante par composante.*

Démonstration. Soit $Z = R \oplus S$ la somme directe de R et S munie des injections $i : R \to Z$ et $j : S \to Z$ définies par l'inclusion de R et S dans Z. Pour tout objet X et tous morphismes $f : R \to X$ et $g : S \to X$, il existe un morphisme $h : Z \to X$ défini comme suit $h(r, 0) = f(r)$ pour r $\in R$, et $h(0, s) = g(s)$ pour s $\in S$.

Supposons qu'il existe un autre morphisme $h' : A \oplus B \to X$ tel que $h'(r, 0) = f(r)$ et $h'(0, s) = g(s)$. Par la propriété de la somme directe, les valeurs de h sont entièrement déterminées par ces assignations. Ainsi, $h' = h$, montrant l'unicité du morphisme. □

1.5.7. *Propriétés des coproduits.* Le coproduit étant la notion duale au produit, on retrouve le même type de propriétés que ce dernier.

Lemme 1. *Soient A et B deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un triplet (Q, i_A, i_B) est un coproduit de A et de B dans la catégorie $\mathcal{C}$ si et seulement si le triplet $(Q, {i_A}^{\mathrm{op}}, {i_B}^{\mathrm{op}})$ est produit de A et de B dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$.*

Démonstration. La démonstration est automatique avec les définitions respectives de produit et de coproduit. □

Proposition 24 (Stabilité à isomorphisme près). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie arbitraire. Soient A, B des objets de $\mathcal{C}$, et soit (Q, i_A, i_B) un coproduit de A et B. Si K est un objet de $\mathcal{C}$ muni d'un isomorphisme $\rho : Q \xrightarrow{\cong} K$, alors*

K est un coproduit dont les injections j_A et j_B sont définies comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
Q \arrow[ur, "\rho"] & & Q \arrow[ul, "\rho"'] \\
A \arrow[u, "i_A"] & & B. \arrow[u, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. C'est un corollaire de la proposition 18 en passant à la catégorie duale par le lemme 1. □

Proposition 25. *Deux coproduits d'une paire d'objets d'une catégorie sont isomorphes.*

Démonstration. La démonstration s'obtient en passant à la catégorie opposée grâce au lemme 1 et en appliquant la proposition 19. □

Proposition 26. *Si A, B sont des objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ qui admettent un coproduit $(A \sqcup B, i_A, i_B)$, alors $(A \sqcup B, i_B, i_A)$ est un coproduit de B et A.*

Démonstration. De la même manière, la démonstration s'obtient en passant à la catégorie opposée grâce au lemme 1 et en appliquant la proposition 20. □

1.5.8. *Lien avec l'objet initial.* Pour terminer cette section, on définit la notion d'*objet initial*, qui généralise le singleton dans les ensembles.

Définition 21 (Objet initial). Dans une *catégorie* $\mathscr{C}$, un objet $\varnothing$ est *initial* s'il existe un unique morphisme $\varnothing \to X$, pour tout objet X de $\mathscr{C}$.

Proposition 27. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie possédant un objet initial $\varnothing$. Pour tout objet A de $\mathscr{C}$, le coproduit de A avec $\varnothing$ existe et est donné par $A \sqcup \varnothing \cong A$.*

Démonstration. La démonstration s'obtient en passant à la catégorie opposée grâce au lemme 1 et en appliquant la proposition 21. □

2. Foncteurs

Les catégories de $\mathscr{Vect}$ des espaces vectoriels, $\mathscr{Ab}$ des groupes abéliens et $\mathscr{Cor}$ des corps sont comme des «continents» mathématiques distincts, chacun abritant sa propre richesse et complexité. Cependant, il peut être intéressant de construire des ponts élégants qui relient ces «continents», permettant ainsi un échange fluide d'idées et de concepts. Ces ponts nous permettent de voir comment les espaces vectoriels de la catégorie $\mathscr{Vect}$, les groupes abéliens de la catégorie $\mathscr{Ab}$ et les corps de la catégorie $\mathscr{Cor}$ peuvent interagir harmonieusement, révélant ainsi des perspectives inédites sur la nature profonde des mathématiques.

2.1. **Définition et composition**.

Définition 22 (Foncteur). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un *foncteur* F de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ est un processus qui associe

- un objet $\mathrm{F}(A)$ de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}$, à tout objet A de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$,
- un morphisme $\mathrm{F}(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathrm{F}(A), \mathrm{F}(A'))$, à tout morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A')$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Flech}_{\mathscr{C}} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathrm{Flech}}"] \arrow[d, "\mathrm{Source}_{\mathscr{C}}\,/\,\mathrm{But}_{\mathscr{C}}"'] & \mathrm{Flech}_{\mathscr{D}} \arrow[d, "\mathrm{Source}_{\mathscr{D}}\,/\,\mathrm{But}_{\mathscr{D}}"] \\
\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathrm{Obj}}"] & \mathrm{Obj}_{\mathscr{D}}
\end{tikzcd}$$

de telle sorte que

- $\mathrm{F}(f \circ_{\mathscr{C}} g) = \mathrm{F}(f) \circ_{\mathscr{D}} \mathrm{F}(g)$, pour tout morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', A'')$ et g de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A')$,
- $\mathrm{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(A)}$.

Heuristiquement, un foncteur F de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$ est une «application» préservant les structures catégoriques respectives.

Exemples 1.

- Soient la catégorie $\mathscr{E}ns_{fini}$ des ensembles finis et la catégorie $\mathscr{E}ns$ des ensembles. On définit le foncteur ***oubli*** $\mathrm{F} : \mathscr{E}ns_{fini} \to \mathscr{E}ns$ qui envoie tout ensemble fini A sur lui-même $\mathrm{F}(A) = A$ et qui envoie toute application ensembliste $f : A \to B$ entre ensembles finis sur elle-même $\mathrm{F}(f) = f$. il préserve les compositions et identités respectives.
- Soient la catégorie $\mathscr{G}rp$ des groupes et la catégorie $\mathscr{E}ns$ des ensembles. On définit le foncteur ***oubli*** $\mathrm{O} : \mathscr{G}rp \to \mathscr{E}ns$ qui associe à tout groupe $(G, x, 1)$ son ensemble sous-jacent G (où on oubli la structure de groupe de G) et qui associe à tout morphisme de groupes $f : (G, x, 1) \to (G', \cdot, 0)$ son application ensembliste sous-jacente $\mathrm{O}(f) : G \to G'$.
- Soient X et Y deux ensembles munis de deux ordres partiels $\pi_X := (X, \leq)$ et $\pi_Y := (Y, \leq)$. La donnée d'un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C}_{\pi_X} \to \mathscr{C}_{\pi_Y}$ entre les catégories associées est équivalente à la donnée d'une application croissante $f : X \to Y$.
- Pour toute catégorie $\mathscr{C}$, le foncteur ***identité*** $\mathrm{Id} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ associe à tout objet de A lui-même et à tout morphisme f lui-même.

Définition-Proposition 9 (Composition de foncteurs). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ trois catégories, et soient $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $\mathrm{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ deux foncteurs, où F envoie les objets de $\mathscr{C}$ dans les objets de $\mathscr{D}$ et les flèches de $\mathscr{C}$ dans les flèches de $\mathscr{D}$, et où G envoie les objets de $\mathscr{D}$ dans les objets de $\mathscr{E}$ et les flèches de $\mathscr{D}$ dans les flèches de $\mathscr{E}$. La ***composition*** de F et G, notée $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$, est le foncteur de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{E}$ défini comme suit :

- à chaque objet X de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$, il associe l'objet $\mathrm{G}(\mathrm{F}(X))$ de $\mathrm{Obj}_{\mathscr{E}}$,
- à chaque morphisme f dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, il associe le morphisme $\mathrm{G}(\mathrm{F}(f))$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathrm{G}(\mathrm{F}(X)), \mathrm{G}(\mathrm{F}(Y)))$.

En d'autres termes, pour chaque objet et chaque morphisme de la catégorie $\mathscr{C}$, la composition $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ applique d'abord le foncteur F pour obtenir l'objet ou le morphisme correspondant dans $\mathscr{D}$, puis elle applique le foncteur G pour obtenir l'objet ou le morphisme correspondant dans $\mathscr{E}$.

Démonstration. Il reste à montrer que le composé de deux foncteurs est encore un foncteur. Soient $g : A \to A'$ et $f : A' \to A''$ deux morphismes de la catégorie $\mathscr{C}$. On a bien

$$\mathrm{G}\big(\mathrm{F}(f \circ_{\mathscr{C}} g)\big) = \mathrm{G}\big(\mathrm{F}(f) \circ_{\mathscr{D}} \mathrm{F}(g)\big) = \mathrm{G}(\mathrm{F}(f)) \circ_{\mathscr{E}} \mathrm{G}(\mathrm{F}(g)) .$$

De la même manière, pour tout objet A de la catégorie $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{G}\big(\mathrm{F}(\mathrm{id}_A)\big) = \mathrm{G}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{F}(A)}\big) = \mathrm{id}_{\mathrm{G}(\mathrm{F}(A))} .$$

$\square$

2.2. **Catégories de catégories.** Pour se faire du bien au cerveau, on peut donc voir que les catégories forment une collection d'«objets» et que les foncteurs sont des «flèches» entre eux ... On doit donc pouvoir empaqueter tout cela dans une ... catégorie !

Définition-Proposition 10 (Catégorie des petites catégories). La *catégorie des petites catégories*, notée $\mathscr{C}\mathit{at}$, est la catégorie définie de la manière suivante :

- les objets de $\mathscr{C}\mathit{at}$ sont les petites catégories, c'est-à-dire les catégories où les objets et les morphismes forment des ensembles,
- les morphismes de $\mathscr{C}\mathit{at}$ sont les foncteurs entre les petites catégories,
- la composition des morphismes dans $\mathscr{C}\mathit{at}$ est la composition des foncteurs,
- les identités de $\mathscr{C}\mathit{at}$ sont les foncteurs identités $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, pour toute petite catégorie $\mathscr{C}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que la composition des foncteurs est associative et unitaire, ce qui est immédiat. □

Définition-Proposition 11 (Catégories des catégories localement petites). La *catégorie des catégories localement petites*, notée $\mathscr{CAT}$, est la catégorie définie de la manière suivante :

- les objets de $\mathscr{CAT}$ sont les catégories localement petites, c'est-à-dire les catégories où les morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ forment des ensembles, pour chaque paire d'objets X, Y de $\mathscr{C}$,
- les morphismes de $\mathscr{CAT}$ sont les foncteurs entre les catégories localement petites,
- la composition des morphismes dans $\mathscr{CAT}$ est la composition des foncteurs,
- les identités de $\mathscr{CAT}$ sont les foncteurs identités $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, pour toute petite catégorie $\mathscr{C}$.

Démonstration. Cette démonstration est similaire à la précédente : il suffit de vérifier que la composition des foncteurs est associative et unitaire. □

2.3. **Propriétés des foncteurs.** Les foncteurs sont des «applications», c'est-à-dire des «flèches» entre catégories. Peut-on alors mettre au jour des notions telles que «foncteur injectif» ou «mono-foncteur», «foncteur surjectif» ou «épi-foncteur», «foncteur bijectif» ou «iso-foncteur» ?

Définition 23 (Foncteur fidèle). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que le foncteur F est ***fidèle*** si, pour toute paire d'objets A et B de $\mathscr{C}$ et pour toute paire de morphismes $f, g : A \to B$, l'égalité $\mathrm{F}(f) = \mathrm{F}(g) : \mathrm{F}(A) \to \mathrm{F}(B)$ de morphismes dans $\mathscr{D}$ entraîne l'égalité de morphismes $f = g$ dans $\mathscr{C}$.

Lorsque les catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont localement petites, cela signifie que les applications ensemblistes $\mathrm{F} : \mathscr{C}(A, B) \to \mathscr{D}(\mathrm{F}(A), \mathrm{F}(B))$ sont injectives, pour toute paire d'objets A, B de $\mathscr{C}$.

Exemple 19. Le foncteur *oubli* $\mathrm{O} : \mathscr{G}\mathit{rp} \to \mathscr{E}\mathit{ns}$ est fidèle.

Définition 24 (Foncteur plein). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que le foncteur F est ***plein*** si, pour toute paire d'objets A et B de $\mathscr{C}$ et pour tout morphisme $g : \mathrm{F}(A) \to \mathrm{F}(B)$ de $\mathscr{D}$, il existe un morphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{C}$ tel que $g = \mathrm{F}(f)$.

Lorsque les catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont localement petites, cela signifie que les applications ensemblistes $\mathrm{F} : \mathscr{C}(A, B) \to \mathscr{D}(\mathrm{F}(A), \mathrm{F}(B))$ sont surjectives, pour toute paire d'objets A, B de $\mathscr{C}$.

Exemple 20. Le foncteur identité $\mathrm{Id} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est toujours plein.

Contrexemple. Le foncteur *oubli* $\mathrm{O} : \mathscr{G}\mathit{rp} \to \mathscr{E}\mathit{ns}$ n'est pas plein car il existe des applications ensemblistes entre groupes qui ne sont pas des morphismes.

Définition 25 (Monofoncteur). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories petites ou localement petites et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que F est un ***monofoncteur*** si c'est un monomorphisme dans la catégorie $\mathscr{C}\mathit{at}$ ou $\mathscr{CAT}$, c'est-à-dire s'il vérifie la propriété suivante : toute paire $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$ de foncteurs tels que $\mathrm{F} \circ \mathrm{G}_1 = \mathrm{F} \circ \mathrm{G}_2$ sont égaux $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$.

Définition 26 (Épifoncteur). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories petites ou localement petites et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que F est un ***épifoncteur*** si c'est un épimorphisme dans la catégorie $\mathscr{C}at$ ou $\mathscr{CAT}$, c'est-à-dire s'il vérifie la propriété suivante : toute paire $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ de foncteurs tels que $\mathrm{G}_1 \circ \mathrm{F} = \mathrm{G}_2 \circ \mathrm{F}$ sont égaux $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$.

Définition 27 (Isofoncteur ou foncteur inversible). Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories petites ou localement petites et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur. On dit que F est un ***isofoncteur*** ou aussi un ***foncteur inversible*** si c'est un isomorphisme dans la catégorie $\mathscr{C}at$ ou $\mathscr{CAT}$, c'est-à-dire s'il admet un foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tel que $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ et $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.

Remarque. Ces notions sont bien définies pour toute catégorie, si on utilise la dernière propriété exprimée.

Remarque. Cette définition d'isofoncteur est beaucoup trop restrictive. On introduira plus tard une notion d'équivalence entre catégories qui sera beaucoup plus souple et qui permettra de comparer plus de catégories.

Exemples 2. Voici des premiers exemples d'isofoncteurs.

- Le foncteur identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est inversible et son inverse est lui-même.
- Le foncteur «opposée» $\mathrm{Op} : \mathscr{CAT} \to \mathscr{CAT}$ qui envoie toute catégorie $\mathscr{C}$ sur sa catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ est un isofoncteur.

Contrexemple. Le foncteur oubli $\mathrm{O} : \mathscr{G}rp \to \mathscr{E}ns$ n'est pas un isofoncteur selon la définition donnée ci-dessus. Pour voir cela, il suffit de considérer deux structures différentes de groupes sur un même ensemble sous-jacent ; on peut par exemple considérer $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ muni soit d'une loi de groupe $+$ isomorphe au groupe abélien $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ soit d'une loi de groupe $\times$ isomorphe au groupe non-abélien $\mathbb{S}_3$ des permutations à 3 éléments. Si le foncteur oubli O admettait un inverse $\mathrm{F} : \mathscr{E}ns \to \mathscr{G}rp$, on aurait des isomorphismes de groupes

$$(X, +) \cong \mathrm{F}(\mathrm{O}(X, +)) \cong \mathrm{F}(X) \cong \mathrm{F}(\mathrm{O}(X, \times)) \cong (X, \times)\ ,$$

ce qui est impossible.

Définition-Proposition 12 (Catégorie des matrices). On définit la *catégorie des matrices* $\mathscr{M}at$ par les données suivantes :

- $\mathrm{Obj}_{\mathscr{M}at} \coloneqq \mathbb{N}$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}at}(m, n) \coloneqq \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$,
- le composition de deux morphismes $M : m \to n$ et $N : n \to p$ est définie par la composition des matrices $N \circ M \coloneqq N \times M : m \to p$,
- les morphismes identités correspondent aux matrices identités $I_m : m \to m$.

Démonstration. L'associativité et l'unitarité de la composition des morphismes est une conséquence directe de l'associativité et l'unitarité du produit des matrices. □

Exemple 21. On considère le foncteur «transposée» $\mathrm{T} : \mathscr{M}at \to \mathscr{M}at^{\mathrm{op}}$ qui envoie une matrice sur sa transposée $M \mapsto {}^tM$. Il s'agit d'un isofoncteur dont l'inverse est presque lui-même $\mathrm{T}^{-1} \coloneqq \mathrm{T}^{\mathrm{op}} : \mathscr{M}at^{\mathrm{op}} \to \mathscr{M}at$.

Exemple 22. On considère la catégorie $\mathscr{E}ns_{\mathrm{print}}$ définie dans l'exemple 15. On définit un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{E}ns_{\mathrm{print}} \to \mathscr{E}ns$ comme suit. Sur les objets, le foncteur F est l'identité : $\mathrm{F}(A) \coloneqq A$. Sur les morphismes, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns_{\mathrm{print}}}(A, B)$, et donc, par définition, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}ns}(A, B \times \mathrm{string})$, on pose $\mathrm{F}(f) \coloneqq p_B \circ f$ avec p_B la projection de $B \times string$ sur B.

$$(A \xrightarrow{f} B \times \mathrm{string}) \qquad \longmapsto \qquad (A \xrightarrow{f} B \times \mathrm{string} \xrightarrow{p_B} B)$$

Souvent, les types de données en informatique sont représentés pas des foncteurs sur la catégorie des ensembles. Par exemple, le foncteur suivant represente le type des listes.

Exemple 23. On peut définir un foncteur $\mathrm{L} : \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$ qui envoie un objet A sur le language de mots finis définis par l'alphabet A, noté A^*. Pour tout $f : A \to B$ on définit $\mathrm{L}(f) : A^* \to B^*$, $(a_1 a_2 ... a_n) \mapsto (f(a_1) f(a_2) ... f(a_n))$.

Définition 28 (Foncteur contravariant). Un *foncteur contravariant* F d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{D}$ est un foncteur convariant de la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathscr{D}$. À tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$, il associe donc un morphisme $\mathrm{F}(f) : \mathrm{F}Y \to \mathrm{F}X$ de $\mathscr{D}$, et il satisfait les relations de compatibilité $\mathrm{F}(f \circ g) = \mathrm{F}(g) \circ \mathrm{F}(f)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}X}$.

Exemple 24. Le foncteur $\mathrm{F} : \mathcal{T}op^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}ns$ défini, pour tout X de $\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}$, par $\mathrm{F}X := Ouv(X)$ l'ensemble des ouverts de X et, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{T}op^{\mathrm{op}}$, par $\mathrm{F}(f) := f^{-1}$ est contravariant.

Exemple 25. Le foncteur $\mathrm{F} : \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$ sur la catégorie des espaces vectoriels qui associe à chaque espace vectoriel E à son dual linéaire E^* et qui associe à chaque morphisme $f : E \to F$ (application linéaire) sa transposée $f^* : F^* \to E^*$, $\varphi \mapsto f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ est contravariant.

3. Transformations naturelles

3.1. **Définitions**.

Définition 29 (Transformation naturelle). Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs de la catégorie $\mathscr{C}$ à la catégorie $\mathscr{D}$. Une *transformation naturelle* φ de F à G est la donnée d'une famille $\varphi_A : \mathrm{F}(A) \to \mathrm{G}(A)$ de flèches de $\mathscr{D}$, une pour chaque objet A de $\mathscr{C}$, telle que pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathscr{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(A) \arrow[r, "\mathrm{F}(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & \mathrm{F}(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\ \mathrm{G}(A) \arrow[r, "\mathrm{G}(f)"'] & \mathrm{G}(B) \end{tikzcd} .$$

La notion de transformation naturelle permet de comparer les foncteurs : il s'agit en fait d'une notion de «morphisme» entre foncteurs. C'est pourquoi on utilise la notation $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ pour indiquer que φ est une transformation naturelle de F vers G.

Exemple 26. Soit $\alpha : R \to S$ un morphisme dans la catégorie $\mathscr{CR}ing$ des anneaux commutatifs unitaires (donc en particulier $\alpha(1_R) = 1_S$). Pour tout entier positif n, nous obtenons un homomorphisme de groupes induit $\varphi_\alpha : \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S)$ donné par $\varphi_\alpha([a_{ij}]) := [\alpha(a_{ij})]$ (c'est-à-dire, appliquer α à chaque entrée de la matrice). Ici, $\mathrm{GL}_n(R)$ désigne le groupe de des matrices inversibles $n \times n$ sur R, qui est le même que le groupe de toutes les matrices $n \times n$ sur R ayant un déterminant unité dans R.

Fixons un entier positif n. Définissons un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{CR}ing \to \mathscr{G}rp$ par $\mathrm{F}(R) := \mathrm{GL}_n(R)$ et $\mathrm{F}(\alpha) = \varphi_\alpha$. Définissons également un foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{CR}ing \to \mathscr{G}rp$ par $\mathrm{G}(R) := R^\times$ et $\mathrm{G}(\alpha) := \alpha|_{R^\times}$, où $R^\times$ désigne le groupe des unités de R pour la multiplication. Pour un objet R de $\mathscr{CR}ing$, définissons $\eta_R = \det_R : \mathrm{GL}_n(R) \to R^\times$ comme la fonction déterminant.

$$R \xrightarrow{\quad \alpha \quad} S$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\det_R"'] & \mathrm{GL}_n(S) \arrow[d, "\det_S"] \\ R^\times \arrow[r, "\alpha|_{R^\times}"] & S^\times \end{tikzcd}$$

Pour tout $A = [a_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(R)$, en utilisant le fait que α est un morphisme d'anneaux, on a

$$\alpha|_{R^\times}\mathrm{det}_R(A) = \alpha\left(\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} \alpha(a_{i\sigma(i)}) = \mathrm{det}_S\varphi_\alpha(A)\ ,$$

où $\mathbb{S}_n$ désigne le groupe symétrique sur $\{1,\ldots,n\}$ et $\mathrm{sgn}(\sigma)$ est la signature de la permutation σ. Par conséquent, $\alpha|_{R^\times}\,\mathrm{det}_R = \mathrm{det}_S\,\varphi_\alpha$ et le diagramme ci-dessus est commutatif.

Exemple 27. Soit $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{E}ns} \Rightarrow \mathrm{P}$ la transformation naturelle de l'identité vers le foncteur des parties d'un ensemble dont les composants $\eta_A : A \to \mathrm{P}(A)$ sont les applications qui envoient $a \in A$ sur le singleton $\{a\} \in \mathrm{P}(A)$.

Définition-Proposition 13 (Catégorie de foncteurs). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. La *catégorie des foncteurs* de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$, notée $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$, est formée des données suivantes :

- les objects sont les foncteurs $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$,
- les flèches de $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ vers $\mathrm{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ sont les transformations naturelles $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$,
- la composition de deux transformations naturelles $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ et $\psi : \mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{H}$ est la composition naturelle $\psi\circ\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{H}$ définie composante par composante par : $(\psi\circ\varphi)_A \coloneqq \psi_A\circ\varphi_A$,
- l'identité $\iota_\mathrm{F} : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F}$ d'un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est définie composante par composante par : $(\iota_\mathrm{F})_A \coloneqq \mathrm{id}_{\mathrm{F}(A)}$.

DÉMONSTRATION. On commence par vérifier que la composée de deux transformations naturelles est bien une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(A) \arrow[r, "\mathrm{F}(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & \mathrm{F}(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\
\mathrm{G}(A) \arrow[r, "\mathrm{G}(f)"'] \arrow[d, "\psi_A"'] & \mathrm{G}(B) \arrow[d, "\psi_B"] \\
\mathrm{H}(A) \arrow[r, "\mathrm{H}(f)"'] & \mathrm{H}(B)
\end{tikzcd}$$

les deux carrés intérieurs commutent donc le rectangle extérieur commute. On voit immédiatement que les identités sont des transformations naturelles. L'associativité et l'unitarité de la catégorie $\mathscr{D}$ assurent l'associativité et l'unitarité de la composition des transformations naturelles. □

Exemple 28 (Espaces vectoriels de dimension finie et matrices). On commence par considérer le foncteur F de la catégorie $\mathscr{Vect}_{\text{dim finie, base ordonnée}}$ vers la catégorie $\mathscr{Mat}$ défini de la manière suivante.

- SUR LES OBJETS : Pour un espace vectoriel V de dimension finie avec une base ordonnée fixée, on pose $\mathrm{F}(V) \coloneqq \dim(V)$.
- SUR LES MORPHISMES : Pour une application linéaire $f : V \to W$, $\mathrm{F}(f)$ est la matrice associée à f dans les bases ordonnées de V et W.

$$\mathscr{Vect}_{\text{dim finie, base ordonnée}} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathscr{Mat}$$

$$\begin{tikzcd}
(V,\{v_1,\ldots,v_n\}) \arrow[r, "\mathrm{F}"] & n = \dim V \\
(W,\{w_1,\ldots,w_m\}) \arrow[r, "\mathrm{F}"'] \arrow[u, "f"] & m = \dim W\ . \arrow[u, "\mathrm{F}(f)"']
\end{tikzcd}$$

On considère maintenant le foncteur G de la catégorie $\mathscr{Mat}$ vers la catégorie $\mathscr{Vect}_{\text{dim finie, base ordonnée}}$ défini de la manière suivante.

- SUR LES OBJETS : À tout entier n, le foncteur G associe l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, soit $\mathrm{G}(n) \coloneqq (\mathbb{R}^n, \{e_1, \ldots, e_n\})$.
- SUR LES MORPHISMES : À toute matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$, le foncteur G associe l'application linéaire $\mathrm{G}(A) \colon X \mapsto AX$ définie par la multiplication à gauche par A.

$$\mathscr{M}at \xrightarrow{\mathrm{G}} \mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnée}}$$

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "\mathrm{G}"] & (\mathbb{R}^n, \{e_1, \ldots, e_n\}) \\
m \arrow[u, "A"] \arrow[r, "\mathrm{G}"'] & (\mathbb{R}^m, \{e_1, \ldots, e_m\}) \arrow[u, "\mathrm{G}(A)"']
\end{tikzcd} .$$

On remarque que $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}at}$ mais que $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnée}}}$, en effet le foncteur $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ envoie tout espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}^n$. Donc les foncteurs F et G ne sont pas des foncteurs inverses l'un de l'autre.

On remarque néanmoins que pour tout espace vectoriel V de dimension finie muni d'une base ordonnée, l'espace vectoriel $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}(V)$ est canoniquement isomorphe à V. On a donc envie de donner du sens à la notation suivante :

$$\mathrm{G} \circ \mathrm{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnée}}} .$$

Pour cela, on considère la transformation naturelle $\eta \colon \mathrm{G} \circ \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnée}}}$ définie pour tout espace vectoriel $(V, \{v_1, \ldots, v_n\})$ muni d'un base ordonnée par l'application linéaire (isomorphisme) $\eta_V : \mathbb{R}^n \to V$ qui envoie la base canonique sur $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnee}} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{G}\circ\mathrm{F}"] \arrow[r, bend right=50, "\iota_{\mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnee}}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathscr{V}ect_{\text{dim finie, base ordonnee}}
\end{tikzcd}$$

Définition 30 (Isomorphisme naturel). Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ est un *isomorphisme naturel* si chaque composante $\varphi_A : \mathrm{F}(A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{G}(A)$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}$, pour tout objet A de $\mathscr{C}$.

Exemple 29. Soit G un groupe. Le «groupe opposé» de G est le groupe G^{op} ayant le même ensemble sous-jacent que G, mais avec l'opération $a \cdot b = ba$, pour $a, b \in G$, où le produit à droite est celui de G. Soit $\mathrm{F} : \mathscr{G}rp \to \mathscr{G}rp$ le foncteur donné par $\mathrm{F}(G) \coloneqq G^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{F}(\phi) = \phi$. Pour un groupe G, définissons $\eta_G : G \to G^{\mathrm{op}}$ par $\eta_G(a) \coloneqq a^{-1}$. Alors, η est un isomorphisme naturel du foncteur identité sur $\mathscr{G}rp$ au foncteur $\mathscr{F}$.

Proposition 28. *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories et soient* $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *deux foncteurs. Une transformation naturelle φ :* $\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ *est un isomorphisme naturel si et seulement si c'est un isomorphisme dans la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ des foncteurs de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{D}$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) : Soit $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ un isomorphisme naturel. Alors, pour tout objet C de $\mathscr{C}$, l'isomorphisme φ_C admet un isomorphisme réciproque :

$$\varphi_C \circ {\varphi_C}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}(C)} \qquad \text{et} \qquad {\varphi_C}^{-1} \circ \varphi_C = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(C)} \ .$$

On considère donc les composantes ${\varphi_C}^{-1} \colon \mathrm{G}(C) \to \mathrm{F}(C)$, donc il est facile de vérifier qu'elles forment une transformation naturelle $\varphi^{-1} \colon \mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{F}$. On prétend qu'il s'agit d'une transformation naturelle inverse de φ car

$$\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)_C = \mathrm{id}_{\mathrm{G}(C)} \qquad \text{et} \qquad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)_C = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(C)} \ .$$

Ce qui montre que φ est un isomorphisme dans la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$.

($\Leftarrow$) : Soit $\varphi : \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G}$ un isomorphisme dans la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$. Il existe donc un isomorphisme $\varphi^{-1} : \mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{F}$ dans la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ réciproque de φ :

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \iota_G \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1} \circ \varphi = \iota_F \ .$$

Ceci signifie que, pour tout objet C de $\mathscr{C}$, on a :

$$\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)_C = \varphi_C \circ {\varphi_C}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(C)} \qquad \text{et} \qquad \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)_C = {\varphi_C}^{-1} \circ \varphi_C = \mathrm{id}_{\mathrm{G}(C)} \ .$$

Ceci montre que φ est un isomorphisme naturel.

□

3.2. **Équivalence de catégories.**

3.2.1. *Définition.*

Définition 31 (Équivalence de catégories). Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Une *équivalence de catégories* entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est la donnée de deux foncteurs

$$\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$$

et de deux isomorphismes naturels

$$\mathrm{F} \circ \mathrm{G} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} \circ \mathrm{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \ .$$

Exemple 30. Dans l'exemple 28, la paire de foncteur $\mathrm{F} \colon \mathscr{Vect}_{\text{dim finie, base ordonnée}} \to \mathscr{Mat}$ et $\mathrm{G} \colon \mathscr{Mat} \to \mathscr{Vect}_{\text{dim finie, base ordonnée}}$ et forment une équivalence de catégories.

Proposition 29. *La relation «être équivalente» est une relation d'équivalence entre catégories.*

Démonstration.

Réflexivité: Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Considérons le foncteur identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ qui envoie chaque objet et chaque morphisme sur lui-même. Il est clair que $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ est un isomorphisme, car son inverse est lui-même.

Symétrie: Soit une catégorie $\mathscr{C}$ équivalente à une autre catégorie $\mathscr{D}$ par un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et un foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et deux isomorphismes naturels de $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ vers l'identité de $\mathscr{C}$ et de $\mathrm{F} \circ \mathrm{G}$ vers l'identité de $\mathscr{D}$. En inversant, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ puis F et G, on obtient que la catégorie $\mathscr{D}$ est équivalente à la catégorie $\mathscr{C}$.

Transitivité: Soit une catégorie $\mathscr{C}$ équivalente à une catégorie $\mathscr{D}$, qui elle-même est équivalente à la catégorie $\mathscr{E}$. Ces deux équivalences sont réalisées par des foncteurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &: \mathscr{C} \to \mathscr{D} \qquad \text{et} \qquad & \mathrm{K} &: \mathscr{D} \to \mathscr{E} \\ \mathrm{G} &: \mathscr{D} \to \mathscr{C} & \mathrm{H} &: \mathscr{E} \to \mathscr{D} \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{F} \circ \mathrm{G} &\cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \qquad \text{et} \qquad & \mathrm{K} \circ \mathrm{H} &\cong \mathrm{Id}_{\mathscr{E}} \\ \mathrm{G} \circ \mathrm{F} &\cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} & \mathrm{H} \circ \mathrm{K} &\cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \ . \end{aligned}$$

On prétend alors que les deux composées de foncteurs $\mathrm{K} \circ \mathrm{F}$ et $\mathrm{G} \circ \mathrm{H}$ sont des équivalences de catégories. En effet, on a bien

$$(\mathrm{K} \circ \mathrm{F}) \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{H}) = \mathrm{K} \circ (\mathrm{F} \circ \mathrm{G}) \circ \mathrm{H} \cong \mathrm{K} \circ \mathrm{H} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$$

et

$$(\mathrm{G} \circ \mathrm{H}) \circ (\mathrm{K} \circ \mathrm{F}) = \mathrm{G} \circ (\mathrm{H} \circ \mathrm{K}) \circ \mathrm{F} \cong \mathrm{G} \circ \mathrm{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \ .$$

Par conséquent, la relation «être équivalente» est une relation d'équivalence entre catégories. □

3.2.2. *Caractérisation.* Tout comme on peut caractériser les bijections uniquement à partir de l'application sans avoir la donnée de sa réciproque, on peut avoir envie de caractériser les foncteurs qui font partie d'une équivalence de catégories sans avoir la donnée du foncteur qui va dans l'autre sens. C'est précisément cette caractérisation que fournit le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories. Un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ fait partie d'une équivalence de catégories si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *F est essentiellement surjectif, c'est-à-dire qu'il est surjectif au niveau des classes d'isomorphismes d'objets : pour tout objet Y de $\mathscr{D}$, il existe un objet X de $\mathscr{C}$ tel que $\mathrm{F}(X)$ soit un isomorphisme à Y dans $\mathscr{D}$.*
- *F est un foncteur plein,*
- *F est un foncteur fidèle.*

Démonstration. Nous allons procéder par analyse-synthèse. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories et soit $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur.

Analyse: Supposons que F fasse partie d'une équivalence de catégories : il existe un foncteur $\mathrm{G}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et des isomorphismes naturels $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ et $\varepsilon : \mathrm{F} \circ \mathrm{G} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. Pour tout objet D appartenant à la catégorie $\mathscr{D}$, nous avons $\varepsilon_D : (\mathrm{F} \circ \mathrm{G})(D) \cong D$. Il existe donc un objet $C = \mathrm{G}(D)$ dans $\mathscr{C}$ tel que $\mathrm{F}(D) \cong D$. Par conséquent, le foncteur F est essentiellement surjective.

En appliquant l'isomorphisme naturel η à ton morphisme $f\colon C \to C'$ de $\mathscr{C}$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(C) \arrow[d, "(\mathrm{G}\circ\mathrm{F})(f)"] \\
C' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(C') \, ,
\end{tikzcd}$$

où η_C et $\eta_{C'}$ sont des isomorphismes de $\mathscr{C}$. On a donc $f = {\eta_{C'}}^{-1} \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(f) \circ \eta_C$. Ceci montre que si deux flèches $f, f' : C \to C'$ vérifient $\mathrm{F}(f) = \mathrm{F}(f')$, alors on obtient

$$f = {\eta_{C'}}^{-1} \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(f) \circ \eta_C = {\eta_{C'}}^{-1} \circ (\mathrm{G} \circ \mathrm{F})(f') \circ \eta_C = f'$$

et donc que F est fidèle. De la même manière, en appliquant l'isomorphisme naturel ε, on montre que le foncteur F est plein.

Synthèse: Supposons maintenant que le foncteur F soit plein, fidèle et essentiellement surjectif. Notre but est de montrer que ce foncteur appartient à une équivalence de catégories. Pour cela, on commence par construire un foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ qui associe, à tout objet D de la catégorie $\mathscr{D}$, un objet $\mathrm{G}(D) \coloneqq C$ de la catégorie $\mathscr{C}$ tel que son image $\mathrm{F}(C) \overset{\alpha_D}{\cong} D$ par F soit isomorphe à D : pour cela on utilise le fait que le foncteur F est essentiellement surjectif et ... l'axiome du choix. Pour tout morphisme $g : D \to D'$ de la catégorie $\mathscr{D}$, on considère la composée suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F} \circ \mathrm{G}(D) \arrow[r, "\alpha_D", "\cong"'] & D \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{F} \circ \mathrm{G}(D') & D' \arrow[l, "{\alpha_{D'}}^{-1}"', "\cong"] \ .
\end{tikzcd}$$

Puisque le foncteur F est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $f : \mathrm{G}(D) \to \mathrm{G}(D')$ tel que $\mathrm{F}(f) = {\alpha_{D'}}^{-1} \circ g \circ \alpha_D$; on pose donc $\mathrm{G}(g) := f$. On laisse à la lectrice ou au lecteur le soin de vérifier que cela définit bien un foncteur G. Par définition, la famille des isomorphismes $\{\alpha_D : F \circ G(D) \to D\}_{D \in \mathscr{D}}$ forme un isomorphisme naturel $\alpha : \mathrm{F} \circ \mathrm{G} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. On laisse à la lectrice ou au lecteur le soin de montrer que l'on a aussi $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.

□

3.2.3. *Catégories squelétales.*

Définition 32. (Catégorie squelétale) Une catégorie $\mathscr{C}$ est dite *squelétale* si toutes ses classes d'équivalence d'objets à isomorphisme près n'ont qu'un seul élément.

Exemple 31. La catégorie $\mathscr{M}at$ vue précédemment est une catégorie squelétale.

Théorème 2. *Toute catégorie $\mathscr{C}$ localement petite est équivalente à une catégorie squelétale $sq\mathscr{C}$, unique à isomorphisme près.*

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un lemme qui nous sera utile pour la démonstration.

Lemme 2. *Deux catégories squelétales équivalentes sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ deux catégories squelétales équivalentes : il existe deux foncteurs $\mathrm{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ et $\mathrm{G} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ et deux isomorphismes naturels $\eta : \mathrm{G} \circ \mathrm{F} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{Id}_{\mathscr{S}}$ et $\epsilon : \mathrm{Id}_{\mathscr{S}'} \overset{\cong}{\Rightarrow} \mathrm{F} \circ \mathrm{G}$. Pour tout objet S de la catégorie $\mathscr{S}$, le morphisme $\eta_S : \mathrm{G} \circ \mathrm{F}(S) \to S$ est un isomorphisme. Comme la catégorie $\mathscr{S}$ est squelétale, le seul objet de $\mathscr{S}$ isomorphe à S est lui même, d'où $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}(S) = S$. On obtient donc, avec la naturalité de la transformation η, l'égalité de foncteurs $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}}$. Par un raisonnement analogue dans la catégorie $\mathscr{S}'$, on obtient que $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}'}$. Au final, on en conclut que les deux catégories $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont isomorphes $\mathscr{S} \cong \mathscr{S}'$. □

On peut à présent procéder à la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 2.

Construction d'une catégorie squelétale $sq\mathscr{C}$: Construisons la catégorie $sq\mathscr{C}$ comme suit.

Objets: Les objets sont les classes d'équivalence à isomorphisme près des objets de la catégorie $\mathscr{C}$.

Morphismes: Pour chaque classe d'équivalence $[A]$, on fixe un objet A qui la représente puis on définit, pour toute paire d'objets $[A]$ et $[A']$ dans $sq\mathscr{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{sq\mathscr{C}}\big([A],[A']\big) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A') \ .$$

Composition: Le composition de la catégorie squelétale $sq\mathscr{C}$ est definie à partir de celle de la catégorie $\mathscr{C}$. Soient $f\colon [A] \to [A']$ et $g\colon [A'] \to [A'']$, elles proviennent de flèches $f\colon A \to A'$ et $g\colon A' \to A''$ de la catégorie $\mathscr{C}$; leur composée est donc donnée par $g \circ f\colon [A] \to [A'']$.

Identités: Pour toute classe $[A]$, on considère le morphisme identité $\mathrm{id}_{[A]}$ représenté par le morphisme identité id_A de A dans $\mathscr{C}$.

Les axiomes d'associativité et d'unitarité de la composition de $sq\mathscr{C}$ sont vérifiés, ils découlent de ceux de la catégorie $\mathscr{C}$.Par construction, la catégorie $sq\mathscr{C}$ est squelétale.

Équivalence de catégories: À présent, construisons un foncteur

$$\begin{aligned} F : sq\mathscr{C} &\to \mathscr{C} \\ [A] &\mapsto A \end{aligned}$$

qui associe à une classe d'équivalence l'objet de la catégorie $\mathscr{C}$ qui le représente (axiome du choix). Par définition de la catégorie squelétale $s\mathscr{C}$, le foncteur F est plein et fidèle :

$$\mathrm{Hom}_{sq\mathscr{C}}([A],[A']) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A') \ .$$

Il est aussi essentiellement surjectif, en effet : pour tout objet B de la catégorie $\mathscr{C}$, sa classe d'équivalence à isomorphisme près est représentée par un objet A, c'est-à-dire $\mathrm{F}([A]) = A \cong B$. On en conclut que le foncteur F fait donc partie d'une équivalence de catégories par le théorème 1.

Unicité à isomorphisme près de $sq\mathscr{C}$: Supposons que $\mathscr{C}$ soit équivalente à deux catégories squelétales $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$. Étant donné que la relation «être équivalent» est une relation d'équivalence entre catégories, on obtient par transitivité que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont équivalentes. Elles sont donc isomorphes par le lemme 2.

□

3.3. **Foncteurs représentables.**

3.3.1. *Définitions.*

Définition 33 (Foncteur de représentation). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite. Pour tout objet C de $\mathscr{C}$, le foncteur covariant $\mathscr{C}(C,-) : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est appelé *le foncteur de représentation* de C et le foncteur contravariant $\mathscr{C}(-,C) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}ns$ est appelé *le foncteur de coreprésentation* de C

Exemples 3 (Exemples de foncteurs de représentation). Dans la catégorie $\mathscr{G}rp$ des groupes, on a les foncteurs de représentation suivants, qui expriment des propriétés universelles vérifiées par les objets respectifs.

- $\mathscr{G}rp(0,-) = \mathrm{Cst}_{\{*\}}$, où 0 est le groupe à un seul élément, c'est-à-dire l'objet initial de la catégorie des groupes.
- $\mathscr{G}rp(\mathbb{Z},-) = \sqcup$, où $\sqcup$ est le foncteur d'oubli des groupes dans les ensembles.

Proposition 30 (Caractérisation des objets initiaux et terminaux). *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite. Un objet $\varnothing$ est initial si et seulement si son foncteur de représentation $\mathscr{C}(\varnothing,-)\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est égal à un foncteur «constant» $X \mapsto \{*\}$, c'est–à-dire à un foncteur qui envoie tout objet X de $\mathscr{C}$ sur un ensemble à un élément (contenant l'unique morphisme $\varnothing \to X$).*

$$\begin{tikzcd} & X \\ \varnothing \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & Z \end{tikzcd}$$

Un objet $*$ est terminal si et seulement si son foncteur de coreprésentation $\mathscr{C}(-,*)$ est égal un foncteur contravariant «constant» $X \mapsto \{*\}$, c'est–à-dire à un foncteur contravariant qui envoie tout objet X de $\mathscr{C}$ sur un ensemble à un élément (contenant l'unique morphisme $X \to *$).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r] & * \\ Z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration est une reformulation automatique des définitions d'objets initiaux et terminaux. □

Définition 34 (Foncteur représentable). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite. Un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est *représentable* s'il existe C dans $\mathrm{Obj}_{\mathscr{C}}$ et un isomorphisme naturel $\mathscr{C}(C,-) \cong \mathrm{F}$ entre F et le foncteur de représentation de C.

Exemple 32. Soit $\mathscr{A}nn$ la catégorie des anneaux unitaires. On peut remarquer que l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est l'objet initial dans la catégorie des anneaux unitaires : pour tout anneau $\mathbb{A}$, il existe un unique morphisme d'anneaux unitaires $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{A}$. Par la proposition 30, cela signifie que le foncteur constant qui envoie tout anneau unitaire sur l'ensemble $\{*\}$ à un élément est représentable par $\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Cst}_{\{*\}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}nn}(\mathbb{Z}, -) \,:\, \mathscr{A}nn \to \mathscr{E}ns \ .$$

On peut aussi considèrer le foncteur oubli

$$\sqcup : \mathscr{A}nn \to \mathscr{E}ns$$

qui associe l'ensemble sous-jacent à tout anneau. Ce foncteur est aussi représentable mais cette fois par l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à une variable à coefficients entiers :

$$\sqcup\mathbb{A} \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}nn}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{A}) \ .$$

En effet, tout morphisme d'anneaux unitaires $f \colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{A}$ est complètement caractérisé par l'image $a = f(X)$ de X : le morphisme f est égal au morphisme ev_a d'évaluation en a

$$f = \mathrm{ev}_a \colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{A} \ , \quad P \mapsto P(a) = \mathrm{ev}_a(P) \ .$$

La bijection de $\eta_{\mathbb{A}} \colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}nn}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{A}) \xrightarrow{\cong} \sqcup\mathbb{A}$ envoie donc un morphisme $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{A}$ sur $f(X)$. Pour tout morphisme $g \colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ d'anneaux unitaires, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{A}) \arrow[r, "\eta_{\mathbb{A}}"] \arrow[d, "g_*"'] & \sqcup\mathbb{A} \arrow[d, "\sqcup g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{B}) \arrow[r, "\eta_{\mathbb{B}}"] & \sqcup\mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, c'est-à-dire

$$\eta_{\mathbb{B}}(g_*(f)) = \eta_{\mathbb{B}}(g \circ f) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) = \sqcup g(\eta_{\mathbb{A}}(f)) \ .$$

On a doc bien un isomorphisme naturel entre le foncteur de représentation $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}nn}(\mathbb{Z}[X], -)$ et le foncteur oubli $\sqcup$.

Le fait que l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[X]$ à une variable représente le foncteur oubli exprime la *propriété universelle* qui dit qu'il s'agit de l'*anneau libre engendré par un élément.*

3.3.2. *Vers la gare du Nord ...* On peut remarquer que si $\mathrm{F} \colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$ est un foncteur représentable par un objet C de $\mathscr{C}$, alors tout isomorphisme naturel $\mathrm{F} \cong \mathscr{C}(C, -)$ définit une bijection entre $\mathrm{F}(C)$ et $\mathscr{C}(C, C) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, C)$. L'élément x de $\mathrm{F}(C)$ correspondant canoniquement à l'identité $\mathrm{id}_C \in \mathscr{C}(C, C)$ est unique à isomorphisme près. Il s'agit d'un élément universel associé au foncteur représentable F. On peut alors voir que l'isomorphisme naturel $\mathscr{C}(C, -) \cong \mathrm{F}$ est donné par $f \in \mathscr{C}(C, D) \mapsto \mathrm{F}(f)(x)$. Le résultat fondamental suivant montre que cette propriété se généralise au cas général où la transformation naturelle est quelconque.

Théorème 3 (Lemme de Yoneda). *Pour tout objet C d'une catégorie localement finie $\mathscr{C}$ et tout foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}ns$, il existe une bijection*

$$\mathrm{Nat}\,(\mathscr{C}(C, -), \mathrm{F}) \cong \mathrm{F}(C)$$

naturelle en C et en F, explicitement donnée par

$$\varphi \longmapsto \varphi_C(\mathrm{id}_C) \ .$$

Démonstration. Notons $\Phi\colon \mathrm{Nat}\left(\mathscr{C}(C,-),\mathrm{F}\right) \to \mathrm{F}(C)$ l'application définie par $\varphi \longmapsto \varphi_C(\mathrm{id}_C)$. Dans l'autre sens, on considère l'application $\Psi\colon \mathrm{F}(C) \to \mathrm{Nat}\left(\mathscr{C}(C,-),\mathrm{F}\right)$ définie par

$$x \mapsto \Psi(x)_D\colon \mathscr{C}(C,D) \to \mathrm{F}(D)$$
$$f \mapsto \mathrm{F}(f)(x)\ .$$

On commence par vérifier que cette application est bien définie, c'est-à-dire que $\Psi(x)$ est bien une transformation naturelle : pour toute flèche $g : D \to D'$, on a

$$\mathrm{F}(g) \circ \Psi(x)_D = \Psi(x)_{D'} \circ g_*\ .$$

Appliqué à toute flèche f de $\mathscr{C}(C,D)$, on obtient bien

$$\left(\mathrm{F}(g) \circ \Psi(x)_D\right)(f) = \mathrm{F}(g) \circ \mathrm{F}(f)(x) = \mathrm{F}(g \circ f)(x) = \Psi(x)_{D'}(g \circ f) = \left(\Psi(x)_{D'} \circ g_*\right)(f)\ .$$

On vérifie ensuite que la composée $\Psi \circ \Phi$ est égale à l'identité de $\mathrm{Nat}\left(\mathscr{C}(C,-),\mathrm{F}\right)$: pour toute transformation naturelle $\varphi\colon \mathscr{C}(C,-) \Rightarrow \mathrm{F}$ pour toute flèche $f\colon C \to D$ de $\mathscr{C}$, on a bien

$$\big((\Psi \circ \Phi)(\varphi)\big)(f) = \Psi(\varphi_C(\mathrm{id}_C))(f) = \mathrm{F}(f)(\varphi_C(\mathrm{id}_C)) = \big(\varphi_D \circ f_*\big)(\mathrm{id}_C) = \varphi_D(f)\ .$$

Dans l'autre sens, on vérifie que la composée $\Phi \circ \Psi$ est égale à l'identité de l'ensemble $\mathrm{F}(C)$: pour tout élément x de $\mathrm{F}(C)$, on a bien

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = \Psi(x)_C(\mathrm{id}_C) = \mathrm{F}(\mathrm{id}_C)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(C)}(x) = x\ .$$

On laisse à la lectrice ou au lecteur le soin de vérifier la naturalité en l'objet C de $\mathscr{C}$ et en le foncteur F, chose qui est automatique avec les définitions. □

Corollaire 1 (Plongement de Yoneda). *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite. Le foncteur $\mathrm{Y}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fon}(\mathscr{C}, \mathscr{Ens})$, appelé* plongement de Yoneda*, qui envoie tout objet C de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ sur son foncteur de représentation $\mathscr{C}(C,-) : \mathscr{C} \to \mathscr{Ens}$, est plein, fidèle et injectif au niveau des objets.*

De plus, un morphisme $f : C \to D$ de $\mathscr{C}$ est un isomorphisme si et seulement si la transformation naturelle induite par $\mathrm{Y}(f^{\mathrm{op}}) : \mathscr{C}(D,-) \Rightarrow \mathscr{C}(C,-)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Si C et D sont deux objets de $\mathscr{C}$, le lemme de Yoneda établit une bijection naturelle entre $\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(C,-),\mathscr{C}(D,-))$ et $\mathscr{C}(D,C)$, ce qui signifie que le foncteur de Yoneda est plein et fidèle. Si deux foncteurs $\mathscr{C}(C,-)$ et $\mathscr{C}(D,-)$ sont égaux, cela implique en particulier que $\mathscr{C}(C,C) = \mathscr{C}(D,C)$ et en appliquant l'application «source», on obtient $C = D$, c'est-à-dire que le plongement de Yoneda Y est injectif au niveau des objets.

On sait qu'un foncteur préserve les isomorphismes (Exercice 3) et que les isomorphismes de la catégorie des foncteurs sont les isomorphismes naturels (Proposition 28). Réciproquement, si $\mathrm{Y}(f^{\mathrm{op}}) : \mathscr{C}(D,-) \Rightarrow \mathscr{C}(C,-)$ est un isomorphisme de foncteurs d'inverse $\psi\colon \mathscr{C}(C,-) \Rightarrow \mathscr{C}(D,-)$, le lemme de Yoneda (Théorème 3) garantit qu'il existe un (unique) morphisme $g\colon D \to C$ de $\mathscr{C}$ tel que $\psi = g^*$. Toujours en appliquant le lemme de Yoneda, on obtient que la composée $\psi \circ \mathrm{Y}(f^{\mathrm{op}}) : \mathscr{C}(D,-) \Rightarrow \mathscr{C}(D,-)$ de transformations naturelles, qui est égale à l'identité du foncteur $\mathscr{C}(D,-)$, est égale au tirage en arrière $(\mathrm{id}_D)^*$ par l'identité de D. Par unicité, on en conclut que $f \circ g = \mathrm{id}_D$. On procède de la même manière pour montrer que $f \circ g = \mathrm{id}$, ce qui conclut la démonstration. □

Dit autrement, toute catégorie localement petite $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ est isomorphe à la sous-catégorie des foncteurs de représentations de $\mathrm{Fon}(\mathscr{C}, \mathscr{Ens})$.

Remarque. Le lemme de Yoneda est surement le résultat le plus puissant de la théorie des catégories ; il est très fréquement utilisé pour démontrer des résultats plus avancés dans ce domaine. Il est a été nommé ainsi après que Saunders MacLane, père de la théorie des catégories, ait rencontré le jeune étudiant Nobuo Yoneda, découvreur de ce résultat, à la ... gare du Nord à Paris. :)

3.4. **Monades et programmation.**

Définition 35. Une *monade* $\mathbb{T}$ sur une catégorie $\mathscr{C}$ comprend les données suivantes :

- Pour tout objet A, un objet $TA \in \mathscr{C}$ et un morphisme $\eta_A : A \to TA$.
- Pour tout morphisme $g : A \to TB$, un morphisme $g^\dagger : TA \to TB$.

Ces données doivent satisfaire trois propriétés :

(1) Pour tout A, $\eta_A^\dagger = \mathrm{id}_{TA}$.

(2) Pour tout morphisme $f : A \to TB$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & TA \arrow[d, "f^\dagger"] \\ & TB \end{tikzcd}$$

(3) Pour toute paire de morphismes $f : A \to TB$ et $g : B \to TC$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "f^\dagger"] \arrow[dr, "(g^\dagger \circ f)^\dagger"'] & TB \arrow[d, "g^\dagger"] \\ & TC \end{tikzcd}$$

Étant donnée une monade $\mathbb{T}$ sur une catégorie $\mathscr{C}$, on peut construire une nouvelle catégorie, appelée $\mathscr{C}_\mathbb{T}$, dont les objets sont ceux de $\mathscr{C}$. Les morphismes de $\mathscr{C}_\mathbb{T}$ sont définis par $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\mathbb{T}}(A, B) = \mathrm{Hom}_\mathscr{C}(A, TB)$. L'identité sur A est donnée par η_A, et la compositon de $f : A \to TB$ et $g : B \to TC$ est le morphisme $f; g = g^+ \circ f : A \to TC$.

Proposition 31. *La construction de $\mathscr{C}_\mathbb{T}$ donnée ci-dessus donne bien une catégorie.*

Démonstration. La composition «;» est associative : considérons $f : A \to TB$, $g : B \to TC$ et $h : C \to TD$ trois morphismes de $\mathscr{C}_\mathbb{T}$. Alors, $(f; g); h = (g^+ \circ f); h = h^+ \circ (g^+ \circ f) = (h^+ \circ g^+) \circ f$, et de la même manière on a $f; (g; h) = f; (h^+ \circ g) = (h^+ \circ g)^+ \circ f = (h^+ \circ g^+) \circ f$, en utilisant la propriété (3). On peut également montrer que η est un élément neutre pour l'identité. En effet, pour $f : A \to TB$, on a $\eta_A; f = f^+ \circ \eta_A = f$ par (2), et $f; \eta_B = {\eta_B}^+ \circ f = \mathrm{id}_{TB} \circ f = f$ par (1). □

Exemple 33. On considére la catégorie $\mathcal{E}ns_{\mathrm{print}}$ (*cf.* Éxemple 15). Il s'agit en fait de la catégorie associée à une monade : pour chaque objet A, on prend $TA = A \times \mathrm{string}$ et pour $f : A \to B \times \mathrm{string}$ on définit $f^\dagger : A \times \mathrm{string} \to B \times \mathrm{string}$ comme suit :

$$A \times \mathrm{string} \xrightarrow{f} B \times \mathrm{string} \times \mathrm{string} \xrightarrow{\mathrm{id}_B \times \mathrm{concat}} B \times \mathrm{string}.$$

(Il reste à vérifier que la composition et les identités sont les bonnes.)

Exemple 34. D'autres exemples de monades sont utilisés pour modéliser les programmes qui utilisent l'état (c'est-à-dire la mémoire). Par exemple, la monade sur $\mathcal{E}ns$ définie par $TA = \mathrm{Hom}(M, A)$, pour un ensemble M fixé (représentant les valeurs possible de la mémoire), représente les programmes qui peuvent seulement *lire* l'état. Pour des programmes qui peuvent également le modifier, on prend $TA = \mathrm{Hom}(M, A \times M)$.

Annexe A. Exercices

Voici une liste d'exercices, avec certaines corrections, qui permettent de bien appréhender les différentes notions vues dans le corps du texte.

Exercice 1. Montrer que, dans toute catégorie, si un morphisme $f : A \to B$ a un inverse $g : B \to A$, alors cette inverse est unique.

Correction 1. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, A et B deux objets de $\mathscr{C}$ et $f : A \to B$ un morphisme inversible dans $\mathscr{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $g : B \to A$ de $\mathscr{C}$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Supposons qu'il existe un morphisme $g' : B \to A$ de $\mathscr{C}$ vérifiant aussi $g' \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g' = \mathrm{id}_B$. On a alors que $g \circ f = g' \circ f = \mathrm{id}_A$ implique

$$g = g \circ (f \circ g) = (g \circ f) \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \ .$$

Exercice 2.

(1) Définir deux catégories telles que la notion de la différentielle (du cours d'analyse) soit un foncteur entre elles.
(2) Faire la même question en remplaçant la différentielle par la matrice jacobienne.

Correction 2.

(1) On considère d'abord la catégorie $\mathscr{D}iff$ dont les objets sont les paires (V, a) formées d'un espace vectoriel normé V et d'un élément $a \in V$ et dont les morphismes, c'est-à-dire les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}iff}\big((V, a), (W, b)\big)$, sont les applications $f \colon V \to W$ différentiables en a et telles que $f(a) = b$. On considère ensuite la catégorie $\mathscr{C}ont$ dont les objets sont les espaces vectoriels normés V et dont les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}ont}(V, W)$, sont les applications linéaires continues $\varphi \colon V \to W$. On laisse au soin de la lectrice ou du lecteur de vérifier les axiomes des catégories $\mathscr{D}iff$ et $\mathscr{C}ont$, ce qui est assez automatique.

    Le foncteur «différentielle» $\mathrm{D} \colon \mathscr{D}iff \to \mathscr{C}ont$ envoie une paire (V, a) d'un espace vectoriel normé V et d'un élément $a \in V$ sur son espace vectoriel normé V sous-jacent et une application différentiable $f \colon (V, a) \to (W, b)$ sur sa différentielle $\mathrm{D}_a f \colon V \to W$ en a. Le fait que la différentielle de l'identité est égale à l'identité et la propriété de chaînes

$$\mathrm{D}_a(g \circ f) = \mathrm{D}_{f(a)} g \circ \mathrm{D}_a f$$

    impliquent qu'il s'agit bien d'un foncteur.
(2) Dans le cas du jacobien, on considère la sous-catégorie $\mathscr{D}iff_{fini}$ des espaces vectoriels normés *de dimension finie* munis d'un élément et la catégorie $\mathscr{M}at$ des matrices. Le foncteur «matrice jacobienne» $\mathrm{J} \colon \mathscr{D}iff_{fini} \to \mathscr{M}at$ envoie une paire (V, a) sur l'objet $\dim V$ de $\mathscr{M}at$ et une application différentiable $f \colon (V, a) \to (W, b)$ sur sa matrice jacobienne $\mathrm{J}_a f \in \mathrm{Mat}_{\dim W, \dim V}$ en a. Le fait que la matrice jacobienne de l'application identité est égale à la matrice identité et la propriété de chaînes

$$\mathrm{J}_a(g \circ f) = \mathrm{J}_{f(a)} g \times \mathrm{J}_a f$$

    impliquent qu'il s'agit bien d'un foncteur.

Exercice 3. Est-ce qu'un foncteur préserve les monomorphismes, les épimorphismes, les isomorphismes ?

Correction 3.

Monomorphismes: Un foncteur ne preserve pas les monomorphismes en général, en voici un contre-exemple. On considère la catégorie $\mathscr{C}$ formée de deux objets 2 et 3, d'un seul morphisme $\alpha \colon 2 \to 3$ et des deux morphismes identités. On considère la catégorie $\mathscr{D}$ formée de trois objets A, B et C, de deux morphismes $f \colon A \to B$ et $g \colon A \to B$, d'un morphisme $h \colon B \to C$, d'un morphisme $k \colon A \to C$, vérifiant $k = h \circ f = h \circ g$, et des morphismes identités. De ces définitions, on voit que α est un monomorphisme de la catégorie $\mathscr{C}$ et que $h \colon B \to C$ n'est pas un monomorphisme de la catégorie $\mathscr{D}$. Il suffit enfin de voir que le foncteur $\mathrm{F} \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ qui envoie 2 sur B, 3 sur C et α sur h est bien défini.

Épimorphismes: Un foncteur ne préserve pas les épimorphismes en général, en voici un contre-exemple. On procède de la même manière qu'au-dessus mais avec la catégorie $\mathscr{C}$ formée de deux objets 1 et 2, d'un seul morphisme $\alpha \colon 1 \to 2$ et des deux morphismes identités et avec la catégorie $\mathscr{D}$

formée de trois objets A, B et C, de deux morphismes $f\colon B \to C$ et $g\colon B \to C$, d'un morphisme $h\colon A \to B$, d'un morphisme $k\colon A \to C$, vérifiant $k = f \circ h = g \circ h$, et des morphismes identités. On voit alors que le morphisme h n'est pas un épimorphisme et le foncteur $\mathrm{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ qui envoie 1 sur A, 2 sur B et α sur h est bien défini.

Isomorphismes: Un foncteur préserve les isomorphismes, en voici une démonstration. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux catégories et $\mathrm{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un foncteur entre elles. Soit $f : A \to B$ un isomorphisme de $\mathscr{C}$; il existe donc un morphisme $g : B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$ dans $\mathscr{C}$. Alors on a aussi

$$\mathrm{F}(g) \circ \mathrm{F}(f) = \mathrm{F}(g \circ f) = \mathrm{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(A)}$$

et

$$\mathrm{F}(f) \circ \mathrm{F}(g) = \mathrm{F}(f \circ g) = \mathrm{F}(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{F(B)} \ .$$

Ainsi $\mathrm{F}(f)$ est lui aussi un isomorphisme.

Exercice 4. Décrire les foncteurs entre catégories associées à des ensembles partiellement ordonnés.

Correction 4. Soient X et Y deux ensembles munis de deux ordres partiels $\pi_X := (X, \leq)$ et $\pi_Y := (Y, \leq)$. La donnée d'un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C}_{\pi_X} \to \mathscr{C}_{\pi_Y}$ entre les catégories associées est équivalente à la donnée d'une application ensembliste $f : X \to Y$ croissante : $x \leq y \implies \mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(y)$.

Exercice 5. Montrer que l'assignement qui envoie un espace topologique sur l'ensemble de ses ouverts ordonnés par inclusion définit un foncteur $\mathscr{T}\!\mathscr{op}^{op} \to \mathscr{EPO}$, où $\mathscr{EPO}$, est la catégorie dont les objets sont les ensembles partiellement ordonnés, et les morphismes sont les applications monotones. L'image d'une application continue $f : X \to Y$ est l'application $O \subset Y \mapsto f^{-1}(O)$.

Exercice 6. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie localement petite et soit A un objet de $\mathscr{C}$. On considère le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A)$ de la catégorie $\mathscr{C}$ dans celle des ensembles $\mathscr{Ens}$ qui associe à tout objet X de $\mathscr{C}$ l'ensemble des flèches $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ et à tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$ l'application ensembliste

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \ , \quad g \mapsto g \circ f \ .$$

(1) Vérifier que l'association $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A)$ définit un foncteur $\mathscr{C} \to [\mathscr{C}^{op}, \mathscr{Ens}]$.
(2) Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de la catégorie $\mathscr{C}$. Vérifier que les applications ensemblistes «poussées-en-avant» $f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, B)$ définissent une transformation naturelle.

Exercice 7. Décrire la catégorie squelétale de la catégorie $\mathscr{Ens}_{finis}$ des ensembles finis.

Exercice 8. Montrer que l'espace vectoriel engendré par $\mathbb{N}$ n'est pas isomorphe à son espace vectoriel dual.

Exercice 9. Est-ce que les foncteurs suivants sont représentables ? Si oui, par quel objet ?
(1) Le foncteur «Oubli» des anneaux vers les ensembles qui envoie un anneau sur son ensemble sous-jacent.
(2) Le foncteur «Unités» des anneaux vers les ensembles qui envoie un anneau sur son ensemble des éléments inversibles.
(3) Le foncteur «Objets» des petites catégories vers les ensembles qui envoie une petite catégorie sur son ensemble d'objets.
(4) Le foncteur «Flèches» des petites catégories vers les ensembles qui envoie une petite catégorie sur son ensemble (global) de flèches.
(5) Le foncteur «Ensemble des ouverts» de la catégorie opposée des espaces topologiques vers la catégorie des ensembles qui envoie un espace topologique sur son ensemble d'ouverts.
(6) Le foncteur «Parties» de la catégorie opposée des ensemble vers celle des ensembles qui envoie un ensemble sur l'ensemble de tous ses sous-ensembles (parties).