UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

DL 4 : ANALYSE

21 FÉVRIER 2023

CONTRÔLE CONTINU 1

NOM, PRÉNOM : VALLETTE Bruno	NOTE : $\frac{10}{10}$

La durée du contrôle est de **20** *minutes. Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.*

Question 1. Donner la définition d'application lipschitzienne $f : (E, \mathrm{N}_E) \to (F, \mathrm{N}_F)$ entre espaces vectoriels normés.

$$\boxed{\exists C > 0,\ \forall x, y \in E,\ \mathrm{N}_F(f(y) - f(x) \leqslant C\, \mathrm{N}_E(y - x)}\ .$$

Question 2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ?

- Toute suite de Cauchy est convergente : ~~VRAI~~/FAUX *(seulement en dimension finie)*
- Pour toute suite convergente $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, on a $\mathrm{N}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{N}(x)$: VRAI/~~FAUX~~ *(toute norme est continue)*
- A ouvert $\Longrightarrow$ A pas fermé : ~~VRAI~~/FAUX *(la faute fatale : notions indépendantes)*
- La boule $\overline{B}((1, 0, -1), 3)$ de $\mathbb{R}^3$ est compacte : VRAI/~~FAUX~~ *(fermé borné est dimension finie)*

Question 3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, soit $x_0 \in E$ et soit $r > 0$. Montrer que la boule

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \mid \mathrm{N}(x - x_0) \leqslant r\}$$

est un sous-ensemble fermé de E.

On montre que le complémentaire $E \backslash \overline{B}(x_0, r)$ est ouvert. Pour cela, soit $x \in E$ et $x \notin \overline{B}(x_0, r)$, c'est-à-dire $\mathrm{N}(x - x_0) > r$. Posons $\rho := \mathrm{N}(x - x_0) - r > 0$. On prétend que la boule ouverte $B(x, \rho)$ de centre x et de rayon ρ est incluse dans le complémentaire $E \backslash \overline{B}(x_0, r)$. En effet, tout $y \in E$ tel que $\mathrm{N}(y - x) < \rho$ vérifie

$$\mathrm{N}(y - x_o) > \mathrm{N}(x - x_o) - \mathrm{N}(y - x) > \mathrm{N}(x - x_o) - \rho = r\ .$$

Question 4. Donner un exemple d'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé (E, N) tel que

$$\mathring{A} \subsetneq A \subsetneq \overline{A}\ .$$

Dans $\mathbb{R}$, on considère l'intervalle $A := [0, 1[$ qui vérifie

$$\boxed{\mathring{A} =]0, 1[\subsetneq A = [0, 1[\subsetneq \overline{A} = [0, 1]}\ .$$
