

LES CATÉGORIES

BRUNO VALLETTE

“Mal nommer les choses contribue au malheur du monde”

Albert Camus

RÉSUMÉ. Notes du séminaire sur les catégories de la classe de Double Licence 3 Mathématiques-Informatique de l'Université Sorbonne Paris Nord 2023-2024.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction : l'algèbre moderne	1
1.1. L'Algèbre ou l'analyse des équations	1
1.2. L'algèbre ou l'axiomatisation des structures algébriques	2
1.3. Intérêts de l'axiomatisation	3
1.4. L'Algèbre moderne	4
1.5. Bourbaki	4
2. L'algèbre de l'algèbre : les catégories	4

1. INTRODUCTION : L'ALGÈBRE MODERNE

1.1. **L'Algèbre ou l'analyse des équations.** Le mot français «algèbre» provient du mot arabe «al-jabr» qui apparaît dans le titre du livre «Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison» publié par en 825 par Al-Khwarizmi, mathématicien perse. Cet ouvrage est le premier à étudier systématiquement la résolution des équations du premier et du second degré. Il est intéressant de noter qu'il se compose de deux parties : la première contient la théorie abstraite des équations algébriques où l'accent est mis sur le type d'opérations utilisée, la seconde contient les diverses applications en vue à l'époque comme les calculs d'héritage, d'arpentage ou de commerce. Le mot arabe «al-jabr», qui signifie «la réduction» au sens de «la réduction d'une fracture», est la terminologie choisie par Al-Khwarizmi pour une des opérations sur les équations, celle qui consiste à réduire une équation en ajoutant des termes, soit deux termes de même nature d'une même côté d'une équation comme

$$x^2 + 3x^2 = 5x + 3 \iff 4x^2 = 5x + 3,$$

soit deux termes identiques de part et d'autres de l'équation comme

$$3x^2 + 3 = -5x \iff 3x^2 + 5x + 3 = 0.$$

(Il est amusant de noter qu'en espagnol le terme dérivé «algebrista» signifie à la fois un algébriste ou rebouteux, celui qui réduit les fractures.)

Disons rapidement que jusqu'au XIX^e, les mathématiciens font des calculs, parfois du même type sur des objets différents. Même s'ils savent utiliser des variables à la place de nombres, s'ils se servent d'une notation pour le 0 ou qu'ils peuvent considérer des nombres imaginaires, peu de place est alors

accordée à la théorie de ses calculs. La première moitié du XIX^e siècle voit une renaissance de l'Algèbre par l'introduction de nouveaux concepts, méthodes et objets pour la résolution des équations algébriques. D'ailleurs, Serret en 1866 écrit en introduction de son *Cours d'algèbre supérieure* (sic) que «L'Algèbre [est], à proprement parlé, l'Analyse des équations».

1.2. L'algèbre ou l'axiomatisation des structures algébriques. C'est donc à partir de la seconde moitié du XIX^e siècle que naît la forme actuelle de l'Algèbre qui consiste à axiomatiser les propriétés des opérations apparaissant dans le traitement des équations et à étudier les structures algébriques qui en résultent plus qu'à étudier les manières de résoudre les dites équations. Voici ce qu'écrit Bourbaki dans son «Éléments d'histoire des mathématiques» : «Nous arrivons ainsi à l'époque moderne, où la méthode axiomatique et la notion de structure (sentie d'abord, définie à date récente seulement), permettent de séparer des concepts qui jusque-là avaient été inextricablement mêlés, de formuler ce qui était vague ou inconscient, de démontrer avec la généralité qui leur est propre les théorèmes qui n'étaient connus que dans des cas particuliers.» Trois grandes familles d'équations y ont alors joué un rôle crucial.

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES: Elles sont du type

$$\begin{cases} 2x + y - z & = 1 \\ 3x + 2y + z & = 4 \\ x + 3y + z & = 2 . \end{cases}$$

La théorie des espaces dans lesquels en elles s'expriment a donné naissance à la notion d'*espaces vectoriels*, dont l'axiomatisation a été donnée principalement par Peano en 1888.

LES ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES: Elles sont type

$$2^x - 1 = y \quad \text{ou} \quad x^5 + y^5 = z^5 ,$$

avec pour solutions des nombres entiers. Leur étude abstraite a donné naissance aux notions algébriques d'*anneaux*, d'*idéaux* et de *corps*, via celle de nombre algébrique grâce principalement à l'école allemande des Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind, Hilbert, après bien sur les travaux de Gauss.

LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES: Elles sont du type

$$8x^3 - 3x^2 + x + 7 = 0 .$$

L'étude de leurs solutions a donné naissance à la notion de *groupe*. Galois est en assurément le principal instigateur mais ses travaux fulgurants mais succincts ne sont publiés et diffusés par Liouville et Serret que bien des années après sa mort en 1832. L'émergence conceptuelle de cette notion doit beaucoup au «Traité des substitutions et des équations algébriques» de Camille Jordan (1870).

Que se passe-t-il à chaque fois ? On reconnaît dans différents exemples des opérations, méthodes et résultats similaires. Il s'agit alors d'en extraire une substantifique moelle : on fait ressortir les propriétés communes essentielles que l'on érige en axiomes pour définir une nouvelle notion conceptuelle. Prenons l'exemple de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire des espaces vectoriels. Comment travaille-t-on avec des objets apparemment si différents que sont

- ◇ la droite, le plan, l'espace ambiant,
- ◇ les matrices (tableaux de nombres),
- ◇ \mathbb{R}^n ,
- ◇ les polynômes,
- ◇ les applications ensemblistes réelles (à valeurs dans \mathbb{R}),

- ◇ les applications continues réelles,
- ◇ les applications C^∞ réelles,
- ◇ les applications mesurable réelles,
- ◇ les ensembles de solution de systèmes d'équations linéaires homogènes,
- ◇ les ensembles de solution de systèmes d'équations différentielles homogènes,
- ◇ les suites numériques satisfaisant un relation de récurrence linéaire,
- ◇ les extensions de corps,
- ◇ etc. ?

On se rend compte que tous les calculs utilisent deux opérations et que ces dernières vérifient toujours le même type de relations. La première opération est une opération binaire consistant à *sommer* les éléments :

$$E \times E \xrightarrow{+} E .$$

Cette addition vérifie à chaque fois les mêmes propriétés : associativité, commutativité, présence d'un neutre (0). Cette structure est enrichie par la présence d'une action du corps de base : on sait multiplier ces éléments par des nombres :

$$\mathbb{R} \times E \xrightarrow{\cdot} E .$$

Dans ce cas aussi, tous les exemples susmentionnés vérifient la même liste de relations : associativité, distributivité, action du neutre, et action sur le 0. Facile alors de donner la définition abstraite et générale d'un espace vectoriel.

1.3. Intérêts de l'axiomatisation. On l'a tous bien senti, le cerveau commence à chauffer. Il y a en effet un prix à payer pour arriver à concevoir cette axiomatisation, c'est celui de travailler de plus en plus abstraitement. Se pose du coup avec acuité la question de l'intérêt d'une telle démarche ; essayons d'en dégager quels bénéfices.

- (1) Cette conceptualisation offre une prise de hauteur remarquable. Cela permet de mettre sur un même pied différents objets qui sont au fond de même nature et cela donne des moyens de les comparer efficacement à l'aide d'une bonne notion de morphisme.

EXEMPLE : En algèbre linéaire, on dispose d'une notion d'*application linéaire* entre espaces vectoriels qui permet de les comparer facilement (injectivité-noyau, surjectivité, dimension, etc.)

- (2) Établir une telle théorie générale permet de démontrer d'un seul coup un résultat qui sera valable automatiquement dans tous les exemples de la théorie. Cela permet une simplification conceptuelle des énoncés.

EXEMPLE : L'existence de bases et leur cardinal qui définit la notion de dimension.

- (3) L'approche abstraite permet de s'affranchir des contraintes imposées à l'esprit par tel ou tel domaine.

EXEMPLE : La géométrie peut nous faire penser que la dimension finie est une hypothèse indispensable, il n'en est souvent rien.

- (4) Extraire un type de structure algébrique permet de mettre au jour ce type de structure sur de nouveaux objets et ainsi d'y appliquer les méthodes d'autres domaines.

EXEMPLE : Utiliser les méthodes vectoriels puissantes de dimension dans le domaine des extensions de corps.

- (5) Cette axiomatisation, une fois bien digérée, permet de voir dans quelle direction poursuivre les recherches. On peut dire que cette sédimentation des idées amènent irrémédiablement à une renaissance quelques (dizaines ?) années plus tard.

EXEMPLE : La notion d'espace vectoriel ouvre ensuite les portes à celles d'algèbres (associatives, commutatives, de Lie), d'espace tangent d'une variété, d'espace vectoriel topologique, etc.

- (6) Cette démarche met au jour un langage universel dont d'autres matières peuvent d'emprarer avec intérêt.

EXEMPLE : Les méthodes et le langage de l'algèbre linéaire ont été accaparé par de nombreux champs de la connaissance comme la mécanique, les sciences naturelles ou les sciences sociales, par exemple. En économie, la modélisation de l'état de l'économie à plusieurs facteurs comme celle d'un pays à l'aide de vecteurs de \mathbb{R}^n a permis à Leontief d'obtenir le «prix Nobel» d'économie en 1973. En effet, si on considère que l'évolution d'une telle économie évolue suivant des règles constantes et linéaires, on est ramené à itérer un endomorphisme, dont la réduction permettra de faire efficacement de la prospective.

1.4. **L'Algèbre moderne.** Sous l'impulsion de l'école allemande des Dedekind, Hilbert, Steinitz, Artin, Noether une unification conceptuelle des notions susmentionnées est entreprise entre 1900 et 1930. Son point culminant est le livre de Van der Waerden, publié en 1930 et dont le titre est bien sur «Algèbre moderne», en français.

1.5. **Bourbaki.** C'est en 1935 que naquit le groupe Bourbaki dont l'ambition n'est rien de moins que d'offrir une présentation cohérente et exhaustive des mathématiques de son époque. Pour se faire, il faut une bonne méthode. Il commence donc par un premier volume de fondation avec la théorie des ensembles, puis continue avec l'Algèbre, etc. Le style est aussi détonnant pour l'époque; Bourbaki écrit ainsi en exergue de chaque de ses traités : « Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier», un peu comme chez Al-Khwarizmi ! Bourbaki choisit donc de décrire les mathématiques à travers les diverses structures qui les composent. Cela fera dire à Emil Artin : «Notre époque assiste à la création d'un ouvrage monumental : un exposé de la totalité des mathématiques d'aujourd'hui. De plus, cet exposé est fait de telle manière que les liens entre les diverses branches des mathématiques deviennent clairement visibles». Car évidemment, le fait de faire ressortir les différentes structures présentes permet de faire des liens entre les différents domaines.

2. L'ALGÈBRE DE L'ALGÈBRE : LES CATÉGORIES

À vous de jouer ...

LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UNIVERSITÉ PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ, CNRS, UMR 7539,
93430 VILLETANEUSE, FRANCE.
E-mail address: vallette@math.univ-paris13.fr