Analyse 4

I] Espaces Vectoriels normés

Hilbert et Banach (~1930)

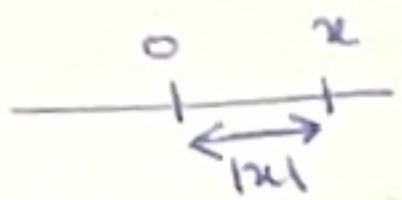
E : espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de dim d
(ici)

Exemple : stocke les données, par ex en économies, biologie…

Question : mesurer l'écart entre deux données ?
↳ déjà taille d'un vecteur.

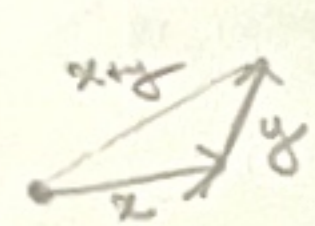
I] Normes sur un espace vectoriel

Ex : $E = \mathbb{R}$ $\quad |x|_{\geq 0}$ valeur absolue



1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$

$E = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\quad |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ "norme"



↓ abstractisation

Def : [Norme] Une norme sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que

dans un ev
1) $N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3) Inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

Le couple (E, N) est appelé "espace vectoriel normé" (donnée)

intérêt : 1 seule dém : Pop $N(x^1 + \dots + x^n) \leq N(x^1) + \dots + N(x^n)$ $\forall n \geq 1$ Déc Rec $\square$

Exemples : sur $\mathbb{R}^d$: $x = (x_1, \dots, x_d)$
($d = 1$ ou 2 général)

- $\boxed{N_2(x) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}}$ "norme euclidienne" de $\mathbb{R}^d$

(associée au produit scalaire euclidien $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ et $N_2(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$)

Démo : ③
1) $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \dots = x_d = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $N_2(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_d)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_d^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_d^2)} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{=|\lambda|} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} = |\lambda| N_2(x)$

3) $N_2(x+y)^2 = \left(\sum_{i=1}^{d} (x_i + y_i)^2 \right) = \langle x+y, x+y \rangle \overset{\text{bilinéarité du ps}}{=}$

$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{\text{symétrie du ps}} = N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2\langle x, y \rangle$

$\leq N_2^2(x) + N_2(y)^2 + 2 N_2(x) N_2(y) = (N_2(x) + N_2(y))^2$

Rappel : inégalité de Cauchy-Schwarz

$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = N_2(x) N_2(y)$

$\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{d} y_i^2\right)}$ $\square$

Démo de l'$\leq$ de CS : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leq N_2(x+ty)^2 = \underbrace{N_2^2(x) + t^2 N_2(y)^2 + 2\langle x, y \rangle t}$

polynôme 2nd degré $\geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$ discriminant

ie $\Delta = b^2 - 4ac = 4\langle x, y \rangle^2 - 4 N_2(x)^2 N_2(y)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq N_2(x)^2 N_2(y)^2$

$\Longleftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq N_2(x) N_2(y)$ $\square$

Proposition

Rq : pour tout espace euclidien $(E, \langle , \rangle) \Longrightarrow \left(E, N(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}\right)$ evn. Démo "idem"

- $\boxed{N_1(x) := |x_1| + \dots + |x_d|}$

Dém ①: 1) $N_1(x) = 0 = |x_1| + \dots + |x_d| = 0 \iff |x_1| = \dots = |x_d| = 0 \iff x = 0$

2) $N_1(\lambda x) = |\lambda x_1| + \dots + |\lambda x_d| = |\lambda| \cdot |x_1| + \dots + |\lambda| \, |x_d| = |\lambda| (|x_1| + \dots + |x_d|) = |\lambda| \, N_1(x)$

3) $N_1(x+y) = |x_1+y_1| + \dots + |x_d+y_d| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_d| + |y_d| = N_1(x) + N_1(y)$

- $\boxed{N_\infty(x) := \max(|x_1|, \dots, |x_d|)}$

Dém ②

1) $N_\infty(x) = 0 = \max(|x_1|, \dots, |x_d|) = 0 \iff |x_1| = \dots = |x_d| = 0 \iff x = 0$

2) $N_\infty(\lambda x) = \max(|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_d|) = \max(|\lambda| |x_1|, \dots, |\lambda| |x_d|) = |\lambda| \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$

3) $N_\infty(x+y) = \max(|x_1+y_1|, \dots, |x_d+y_d|) = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max(|x_1| + \dots + |x_d|) + \max(|y_1| + \dots + |y_d|) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$

Ex 1 → Cours Exemples

Rq: un même espace vectoriel peut avoir plusieurs normes (donnée = structure supplémentaire)

Rq: $\forall\, 1 \leq p < +\infty \quad N_p(x) := (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}$ est une norme → Exo ☆ Maison

Déf: Boule unitée de centre 0 : fermée $\overline{B}_N(0,1) := \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$

ouverte $B_N(0,1) := \{x \in E \mid N(x) < 1\}$

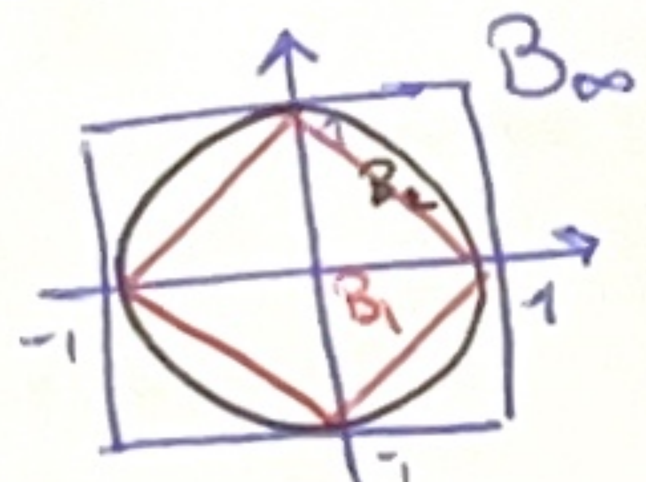
de rayon 1 / rayon r

Ensemble de tous les vecteurs à distance ≤ 1 de l'origine

Vision géométrique d'une norme

Exercice 2 (Classe) :

dans $\mathbb{R}^2$



Exercice 2 → maison idem dans $\mathbb{R}^3$ B_1 : octaèdre, B_2 : Boule, B_∞ : Cube

Définition: [Équivalence de normes] Soit E ev

Deux normes N_1 et N' sont équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tq

$\forall x \in E \quad c_1 N(x) \leq N'(x) \leq c_2 N(x)$ note $N_1 \sim N_2$

Rq: déf $\iff \exists\, c > 0$ tq $\frac{1}{c} N(x) \leq N'(x) \leq c N(x)$

Dém: ($\Leftarrow$) trivial ($\Rightarrow$) $c := \max(c_2, \frac{1}{c_1})$

⊗ Proposition: L'équivalence des normes est une relation d'équivalence (sur l'ensemble des normes d'un ev fixé)

Dém.

- Réflexive : $N \sim N$ $\quad c_1 = c_2 = 1$
- Sym : $N \sim N' \Rightarrow N' \sim N$:

$\frac{1}{c_2} N'(x) \leq N(x) \leq \frac{1}{c_1} N'(x)$

- Transitive : $N \sim N'$ et $N' \sim N''$ signifie $\exists\, c_1, c_2, c'_1, c'_2 > 0$

$c_1 N(x) \leq N'(x) \leq c_2 N(x) \quad c'_1 N'(x) \leq N''(x) \leq c'_2 N'(x)$

$\forall x \in E$

$\Rightarrow \underbrace{c_1 c'_1}_{>0} N(x) \leq N''(x) \leq \underbrace{c_2 c'_2}_{>0} N(x)$ ie $N \sim N''$ ■

Exercice 3-4-5 → Maison

Exercice 2 2) → Cours ⊗

3)

4) → Maison

Ex 2.2) plus généralement sur $\mathbb{R}^d$

Proposition: Sur $\mathbb{R}^d$, les normes vues sont équivalentes

$$N_1 \sim N_2 \sim N_p \sim N_\infty \quad \forall p \geq 1$$

Démo: ~~Exercice~~

$\left(N_\infty(x_1,\dots,x_d) \leq N_1(x_1,\dots,x_d) \leq d\, N_\infty(x_1,\dots,x_d) \text{ et } N_1 \sim N_\infty\right)$

$$N_\infty(x_1,\dots,x_d) \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ (|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p}}}{N_p(x_1,\dots,x_d)} \leq d\, N_\infty(x_1,\dots,x_d)$$

max $= |x_i|$ et $(|x_i|^p)^{1/p} = |x_i|$

$x \mapsto x^p$, $x \mapsto x^{1/p}$ ↗

$\forall p \geq 1$, $\forall x_1,\dots,x_d \in \mathbb{R}$ □

On conclut avec la proposition précédente ($\sim$ est une relation d'équivalence)

Question\Conjecture: Sur tout ev de dim finie, toutes les normes sont équivalentes?
(si oui : "so what" : théorie "triviale")

Ex 2.3) → Rq: effet sur les boules: $B_N(0,\frac{1}{c_2}) \subset B_{N'}(0,1) \subset B_N(0,\frac{1}{c_1})$

Constructions de normes (// comme construction d'evs)

Proposition [Norme produit] Soient $(E_1,N_1),\dots,(E_k,N_k)$ des evn

alors $N: E_1 \times \dots \times E_k \to \mathbb{R}^+$, $(x_1,\dots,x_k) \mapsto \max_{1 \leq i \leq k} N_i(x_i)$ est une norme de $E_1 \times \dots \times E_k$

Démo: Exercice → maison □

Lemme: Soient E ev, (F,N_F) evn, $f: E \hookrightarrow F$ application linéaire (injective)

alors $N_E: E \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto N_F(f(x))$ est une norme de E (?)

Démo: 1) $N_E(x) = 0 \iff N_F(f(x)) = 0 \underset{N_F \text{ norme}}{\iff} f(x) = 0 \underset{f \text{ inj}}{\iff} x = 0$

2) $N_E(\lambda x) = N_F(f(\lambda x)) \underset{f \text{ lin}}{=} N_F(\lambda f(x)) \underset{N_F \text{ norme}}{=} |\lambda| N_F(f(x)) = |\lambda| N_E(x)$

3) $N_E(x+y) = N_F(f(x+y)) \underset{f \text{ lin}}{=} N_F(f(x)+f(y)) \underset{N_F \text{ norme}}{\leq} N_F(f(x)) + N_F(f(y)) = N_E(x) + N_E(y)$ □

Théorème: Soit $B = \{e_1,\dots,e_d\}$ une base d'un ev E
$\forall x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$

Les applications suivantes sont des normes

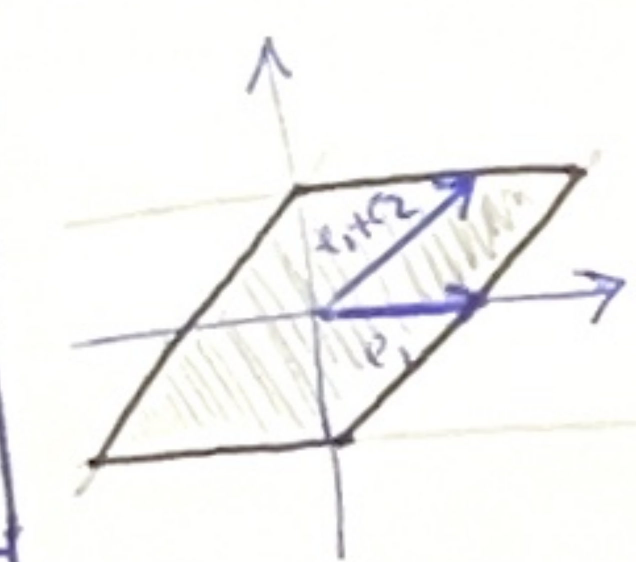
$N_{B,1}(x) := \sum_{i=1}^d |x_i|$

$N_{B,2}(x) := \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$N_{B,\infty}(x) := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$

$\left(N_{B,p}(x) := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}\right)$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$
$B = \{e_1, e_1+e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$N_{B,\infty}$ induit la boule unité



Démo: Corollaire du lemme: on considère

$F = \mathbb{R}^d$, $N_F = N_p$, $f: E \xrightarrow{\text{coord}} \mathbb{R}^d$, $\underset{x_1 e_1 + \dots + x_d e_d}{x} \mapsto (x_1,\dots,x_d)$ isomorphisme ⇒ injectif linéaire ⇒ $N_p(f(x))$ est une norme de E

$N_p(f(x)) = N_p(x_1,\dots,x_d)$ □

Question : autre ev que l'on voudrait normer ?

↳ $\mathcal{L}(E,F) := \{f : E \to F \text{ linéaire}\} \to \cong \mathbb{R}^{dd'}$

dim finie $\cong M_{d',d}$ si $\dim E = d$ et $\dim F = d'$

Donc on peut utiliser ce qui précède... oui mais

$(M_n(\mathbb{R}), \underbrace{+, \cdot}_{\text{ev}}, \boxed{\times}, 0, I_n)$ est une algèbre (unitaire)

$\times$: multiplication ; compatibilité

on cherche N compatible avec le produit $\times$

Ex : $N(A) := n N_\infty(A) = n \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} |a_{ij}|$: norme (déjà vue)

$A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

pour $A,B \in M_n(\mathbb{R})$: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Rightarrow$

$$N(AB) \le N(A)N(B)$$

Déf. [Norme d'algèbre] Soit $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times, 0, \mathbb{1})$ une algèbre (unitaire) sur $\mathbb{R}$. Une norme N de l'ev $(\mathcal{A},+,\cdot)$ est une <u>norme d'algèbre</u> si

4) $N(AB) \le N(A)N(B)$ $\forall A,B \in \mathcal{A}$

5) $N(\mathbb{1}) = 1$

Ex : $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times, 0; N)$ algèbre normée
pas unitaire $N(I_n) = n \neq 1$

Rq : N_∞ pas une norme d'algèbre : $N\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^2\right) \not\le N\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)^2$
$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} = 2 \not\le 1$

Question : autre norme d'algèbre (si possible unitaire)

$$\tilde{N}(A) := \max_{1\le j\le m}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

colonnes ; lignes ; max

et "transposée"

$$\hat{N}(A) := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

max

Proposition : $\boxed{\text{Deux normes d'algèbre unitaire}}$

Démo : 0) ≥ 0 ; $\tilde{N}$, $\hat{N}$ mêmes arguments

2) $\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \tilde{N}(A)$

3) $\tilde{N}(A+B) = \max\limits_{1\le j\le m}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}|}_{\le \sum_{i=1}^n |a_{ij}| + \sum_{i=1}^n |b_{ij}|}\right) \le \underbrace{\max\limits_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + \max\limits_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|}_{\tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)}$

1) $\tilde{N}(A) = 0 \iff A = 0$

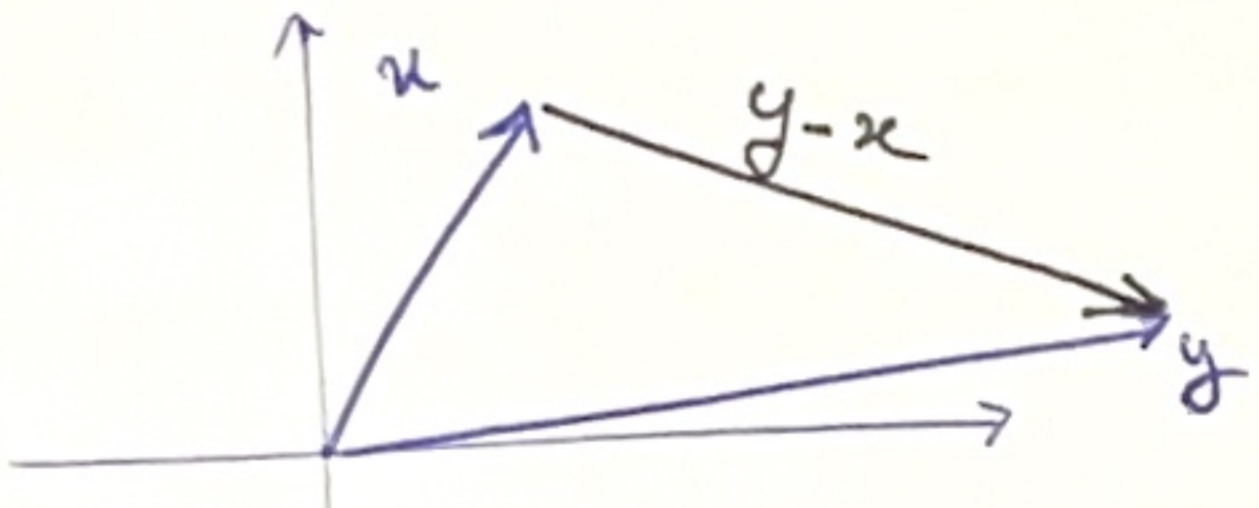
4) $|(AB)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |(AB)_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right)}_{\le \tilde{N}(A)} |b_{kj}|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |(AB)_{ij}| \le \tilde{N}(A) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|}_{\le \tilde{N}(B)}$$

5) $\tilde{N}(I_n) = \max\limits_{1\le j\le n} 1 = 1$ $\square$

II Distance et boules



Distance à 0 : N

Comment définir la distance entre 2 vecteurs

Rq: définition général sur tout ensemble ~~X~~

$\hookrightarrow$ topologie (L3 : espaces métriques)

lien étude

Prop ~~Rq~~: $|N(y)-N(x)| \leq N(y-x)$

Démo : Inégalité triangulaire

$$N(y) = N(y-x+x) \leq N(y-x) + N(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N(y)-N(x) \leq N(y-x) \\ N(x)-N(y) \leq \underset{=}{N(x-y)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$|N(y)-N(x)| \leq N(y-x) \quad \square$$

Ex: $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

distance euclidienne

Propriétés

- Invariance par translation

$d(x,y) = d(x_0+x, x_0+y)$

- Homogénéité

$d(x_0, x_0+\lambda x) = |\lambda|\, d(x_0, x_0+x)$

Déf. [Distance associée à une norme]

La distance associée à une norme N d'un evE est l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$

$$(x,y) \longmapsto N(y-x)$$

Prop: a) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$

b) $|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z)$

Cor: $x_0 \in E$, $r > 0$

$\overline{B}(x_0,r) = x_0 + r\overline{B}(0,1)$

Démo: a) ~~Récurrence ou prop du début~~ $N(x_n - x_1) = N(x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} \dots)$

$\leq \underbrace{N(x_n - x_{n-1}) + N(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + N(x_2 - x_1)}_{d(x_n,x_{n-1}) + \dots + d(x_2,x_1)}$

b) $|N(z-x) - N(y-x)|$

$$\leq N(z-x-(y-x)) = N(z-y) = d(z,y) \quad \square$$

~~Déf~~ **Proposition** Une distance sur un ensemble $d : E\times E \to \mathbb{R}^+$ tq ~~Toute distance associée à une norme~~ vérifie

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ sym

3) Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\leq \Delta$

Démo: 1) $d(x,y) = 0 = N(y-x) \iff y-x = 0 \iff y = x$

2) $d(x,y) = N(y-x) = N(x-y) = d(y,x)$

3) $d(x,z) = N(z-x) = N(z-y+y-x) \leq \underbrace{N(z-y)}_{d(y,z)} + \underbrace{N(y-x)}_{d(y,x)} \quad \square$

Déf. [Boules]

La boule ouverte de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r \geq 0$ est

$$B(x_0,r) := \{x \in E \mid d(x,x_0) < r\}$$

fermée

$$\overline{B}(x_0,r) := \{x \in E \mid d(x,x_0) \leq r\}$$

Ex:

$B(x_0,0) = \emptyset$

$\overline{B}(x_0,0) = \{x_0\}$

Déf : [Application Lipschitzienne]

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux evns.

Une application ~~linéaire~~ $f : A \subset E \to F$ est $\underline{C\text{-Lipschitzienne}}$ ($C > 0$) sur A ~~lorsque~~ si $\forall x, x' \in A$ $\quad d_F(f(x), f(x')) \leq C\, d_E(x, x')$

- Lorsque $\underline{C \leq 1}$, on dit que f est une contraction
- ——— $\underline{C < 1}$ ——— est contractante

Proposition Soit E ev, deux normes N et N' sont équivalentes ssi $Id : (E,N) \to (E,N')$ et $Id : (E,N') \to (E,N)$ sont Lipschitziennes

Démo : $\hookrightarrow \exists c > 0$ tq $N(y-x) \leq C N'(y-x)$ $\quad \forall y, x \in E$

$\Downarrow$ $x = 0$, $\forall y \in E$

$N(y) \leq C N'(y)$ $\quad$ autre $\leq$ $\square$

---

b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, \ell) = 0$

notation : $x_n \to \ell$

$\iff \lim_{n\to+\infty} N(x_n - \ell) = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon\ N(x_n - \ell) \leq \varepsilon$ (en norme) $\to$ $\nexists$ un $+\infty$ dans un evn

d) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "part à l'infini" si $\lim_{n\to+\infty} N(x_n) = +\infty$

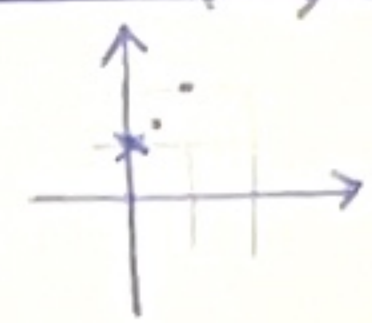
$\iff \forall A > 0\ \exists N_A \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_A \quad N(x_n) \geq A$

c) La suite est de Cauchy si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon \quad N(x_m - x_n) \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ les termes de la suite se rapproche autant que possible à l'infini. (pas "accès" de limite, complet)

Ex. $x_n = \left(\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}\right)$ dans $\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = N_2$



a) $\|x_n\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} \leq \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$: bornée

b) $x_n \to (0,1)$

c) non

d) oui $\to$ exercice (en classe si jamais vu "Cauchy")

Fin du Cours 1

Début Cours 2

III] Suites (similaire à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$)

Déf. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} \to E$) une suite d'éléments de (E, N) evn

a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(x_n) \leq M$

Prop

a) Unicité de la limite lorsqu'elle existe $\begin{cases} x_n \to \ell \\ x_n \to \ell' \end{cases} \Rightarrow \ell = \ell'$

b) $\begin{cases} x_n \to \ell \\ y_n \to \ell' \end{cases}$ $\Rightarrow x_n + \lambda y_n \to \ell + \lambda \ell'$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

c) $((x_n)_n$ converge$) \Rightarrow ((x_n)_n$ de Cauchy$) \Rightarrow ((x_n)_n$ bornée$)$ $\nLeftarrow$ (x_n) ne converge pas vers l'infini

d) Lorsque $N \sim N'$: $\quad ((x_n)_n$ converge / bornée / de Cauchy / part à l'∞ dans $(E, N)) \iff ((x_n)_n$ converge / bornée / de Cauchy / part à l'∞ dans $(E, N'))$