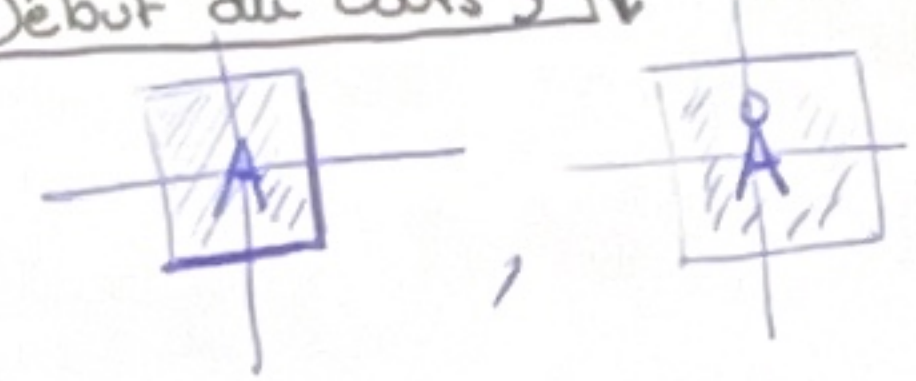
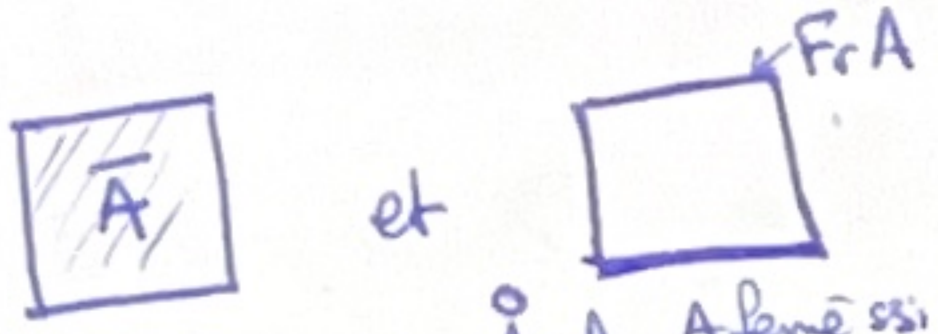
Début du Cours 3 ↓

Ex:





Rq: $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ et A ouvert ssi $\mathring{A} = A$, A fermé ssi $A = \bar{A}$

$\overline{E\setminus A} = E\setminus \mathring{A}$ et $E\setminus \bar{A} = \mathring{\overline{E\setminus A}}$

Propriétés:

1) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
2) $\bar{A}$ ——— petit fermé contenant A
3) La frontière Fr A est un fermé
4) $\bar{A}$ est l'ensemble des limites des suites (général → suites) de A convergentes

Démo: 1) "Trivial" union d'ouverts ⇒ ouvert

Soit O ouvert, $O \subset A \Rightarrow O \subset \mathring{A}$ par définition

2) idem

3) $E - \mathrm{Fr}A = \mathring{A} \cup (E\setminus\bar{A})$: ouvert

ouverts

4) Montrons par double inclusion que

$$\bar{A} = \{x \in E \mid \exists (x_n)_n \in A,\ x_n \to x\}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x_n \to x$ avec $(x_n)_n$ dans A

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\bar{A}$ fermé $\Rightarrow x \in \bar{A}$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \bar{A}$, soit $n \in \mathbb{N}$, supposons par l'absurde que $B(x,\frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$

$\Updownarrow$

$A \subset \underbrace{E\setminus B(x,\frac{1}{n})}_{\text{fermé}}$

$\Downarrow$ déf

contredit $x \in \bar{A}$ ← $\bar{A} \subset E\setminus B(x,\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A$ ie $x_n \xrightarrow{\in A} x$. □

Ex: $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{2n+2}}; \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$

$\bar{F} = F \cup \{0\}$

Exercice (Bonus). ↳ à rédiger 2

1) Mq $x \in \mathring{A}$ ssi $\exists r>0,\ B(x,r) \subset A$
2) Mq $\mathring{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{2^{2n+2}}; \frac{1}{2^{n+1}}\right[$
3) Calculer $\mathring{\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}$

Exercices 13 → 16 (sauf 2) : finir (cohérence - intérieur)

Question générale: ∃ de suites convergentes ?

Déf. [Compacité]

Un sous-ensemble K d'un evn est **compact** si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante convergeant dans K.

Proposition: K compact ⇒ K fermé et borné

Démo:

• Fermé: par l'absurde supposons que K ~~c'est~~ ne soit pas fermé ⟺ $E\setminus K$ pas ouvert ⟺ $\exists x \notin K$ tq $\forall r>0\ B(x,r) \cap K \neq \emptyset$

Pour $r = \frac{1}{n}$, cela fournit un $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap K$ donc $x_n \to x$. Mais il existe une suite extraite $x_{\varphi(n)} \to y$ avec $y \in K$.

$x_{\varphi(n)} \to x$ et par unicité de la limite $x = y \in K$, $x \notin K$ contradiction

• Borné: par l'absurde si ce n'est pas vrai ⟺ $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in K$ et $N(x_n) > n$

une telle suite ne saurait admettre de sous-suite convergente car une suite convergente est bornée. □

2 Réciproque fausse en général :

__Contre-exemple :__ $E=\mathbb{R}[X]$ $\quad \|P(X)=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\| = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ norme

$\overline{B}(0,1)$ est fermée et bornée par définition

mais la suite $(x_n := X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{B}(0,1)$ n'admet aucune suite extraite convergente. (à rédiger)

(Norme non équivalente) sur $\mathbb{R}[X]$: $N(P) := \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$: à rédiger aussi

mais en dimension finie :)

$\boxed{\text{Thm}}$ Dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\overset{\|\cdot\|_p}{N_p}$, $\forall 1\leq p\leq\infty$, tout ensemble fermé et borné est compact.

__Démo__ : Comme ces normes sont équivalentes, il suffit de le faire pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit K fermé et borné. Si $K=\emptyset$ c'est fini. Sinon $K\neq\emptyset$ et on considère une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K.

Comme K est borné, il existe $C>0$ tel que
$\forall n\in\mathbb{N}$ $\|x^n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x^n_i| \leq C$

Donc $(x^n_1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow \exists \varphi_1 : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ croissante et $x_1\in\mathbb{R}$
tels que $x_1^{\varphi_1(n)} \longrightarrow x_1$.

Idem la suite $(x_2^{\varphi_1(n)})_n$ ______ $\Longrightarrow \varphi_2$ ______ $x_2\in\mathbb{R}$

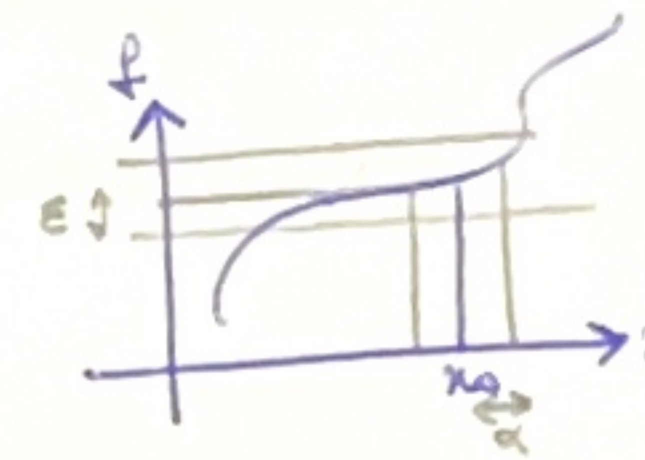
______ $x_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \longrightarrow x_2$

⋮

Au final la suite $x^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_d(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_d(n)}, \dots, x_d^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_d(n)} \end{pmatrix} \longrightarrow (x_1,\dots,x_d)$

Comme $x^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_d(n)} \in K$, $\forall n\in\mathbb{N}$, et que K est fermé, alors $(x_1,\dots,x_d)\in K$. $\square$

$\boxed{\text{V}}$ Continuité



__Paradigme__ sur $\mathbb{R}$: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en x_0 si :

$\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>0\quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

__Def__ [Continuité]. Une application $f:(E,N_E)\to(F,N_F)$ entre evn est continue en $x_0\in E$ si

(quelconque pas nécessairement linéaire)

$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0\quad d_E(x,x_0)<\alpha \Rightarrow d_F(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

. Une application $f:(E,N_E)\to(F,N_F)$ est continue sur $A\subset E$ si elle est continue en tout point $x_0\in A$.

__Exemples :__ . $Id : (E,N)\to(E,N)$: il suffit de considérer $\alpha=\varepsilon$

. Tout application Lipschitzienne est continue (sur E) :

$\exists C>0, \forall x,y\in E\quad d_F(f(x),f(y)) < C d_E(x,y)$

(quelconque : pas besoin $C\leq 1$)

$\forall x_0\in E$, $\forall\varepsilon>0$ pour $\alpha=\frac{\varepsilon}{C}$ on a $d_E(x,x_0)<\alpha \Rightarrow$

$d_F(f(x),f(x_0)) < C d_E(x,x_0) < C\alpha = \varepsilon$

↳ __Exemple__ : Toute norme N d'un evn E est 1-Lipschitzienne car $\forall x,y\in E$

$|N(y)-N(x)| \leq 1\times N(y-x) \Rightarrow N : E\to\mathbb{R}^+$ continue

Proposition

1) Soient $f:(E,N_E)\to(F,N_F)$ continue en x_0 et $g:(F,N_F)\to(G,N_G)$ continue en $f(x_0)$.
Alors $g\circ f:(E,N_E)\to(G,N_G)$ est continue en x_0.

2) Soient $f,g:(E,N_E)\to(F,N_F)$ continue en x_0, alors $\lambda f+\mu g$ est continue en x_0, pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

sans aucune surprise ⇒ Exercice

Démo: 1) Soit $\varepsilon>0$, comme g est continue en $f(x_0)$,

$\exists\beta>0$ tq $\forall y\in F$ $d_F(y,f(x_0))<\beta \Rightarrow d_G(g(y),g\circ f(x_0))<\varepsilon$

Puis en utilisant la continuité de f en x_0 (à "ε" $=\beta$), on a

$\exists\alpha>0$ tq $\forall x\in E$ $d_E(x,x_0)<\alpha \Rightarrow d_F(f(x),f(x_0))<\beta$

$\Downarrow$

$d_G(g\circ f(x),g\circ f(x_0))<\varepsilon$

□

2) Exercice

Proposition:

La continuité d'une application entre deux evns ne dépend pas des normes équivalentes choisies

Démo: Soit $f:E\to F$ ~~et~~ soient $N_E\sim N'_E$ deux normes de E équivalentes $\Leftrightarrow$ $Id_E:(E,N_E)\to(E,N'_E)$ et $Id_E:(E,N'_E)\to(E,N_E)$ lipschitziennes

et soient $N_F\sim N'_F$ ——— F ——— $\Leftrightarrow$ $Id_F:(F,N_F)\to(F,N'_F)$ et $Id_F:(F,N'_F)\to(F,N_F)$ "

Donc $f:(E,N_E)\to(F,N_F)$ continue en x_0 implique $f=Id_F\circ f\circ Id_E$:

$(E,N'_E)\xrightarrow{Id_E}(E,N_E)\xrightarrow{f}(F,N_F)\xrightarrow{Id_F}(F,N'_F)$

continue en x_0 comme composée d'applications continues :) □

La réciproque se fait de la même manière. [redacted]

Thm [Caractérisation avec les suites]

$f:(E,N_E)\to(F,N_F)$ les psse

1) f continue en x_0

2) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, on a $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x_0)$

Exercices 6-12

Démo: 1)⇒2) Soit $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x_0$ dans E.

Soit $\varepsilon>0$. La continuité de f en x_0 donne

$\exists\alpha>0$ $N_E(x-x_0)<\alpha \Rightarrow N_F(f(x)-f(x_0))<\varepsilon$

Puis la convergence $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x_0$ donne "pour $\varepsilon=\alpha$":

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ N_E(x_n-x_0)<\alpha$

Soit au final:

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,$

$N_F(f(x_n)-f(x_0))<\varepsilon,$

c'est-à-dire $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x_0)$

(2)⇒(1) Montrons la contraposée : supposons f pas continue en x_0, ie.

$\exists\varepsilon>0\ \forall\alpha>0\ \exists x\in E,$

$N_E(x-x_0)<\alpha$ et $N_F(f(x)-f(x_0))\geq\varepsilon$

Pour $\alpha=\frac{1}{n}$, il existe donc $x_n\in E$ tel que

$N_E(x_n-x_0)<\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$x_n\longrightarrow x_0$

et $N_F(f(x_n)-f(x_0))\geq\varepsilon$

$\Downarrow$

$f(x_n)\not\longrightarrow f(x_0)$ □

Corollaire: Soit $f:(E, N_E) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$
$$x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

f continue en x_0 si et seulement si $f_i : (E, N_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continue en x_0 $\forall 1 \leq i \leq d$.

Démo: Comme la continuité ne dépend pas de la norme équivalente, on considère $\|\cdot\|_\infty$. ~~La proposition~~ Le théorème précédent montre

$(\Leftarrow)$

f continue en $x_0 \Leftrightarrow (\forall x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0)) \Leftrightarrow (\forall x_n \to x_0,\ f_i(x_n) \to f_i(x_0)\ \forall 1 \leq i \leq d)$

proposition sur la convergence des suites de $\mathbb{R}^d$

pas direct

$\not\Leftarrow$ car les suites doivent pouvoir être différentes pour tout i.

$\Leftarrow (f_i$ continue en x_0, $\forall 1 \leq i \leq d)$

$(\Rightarrow)$ Soit $1 \leq i \leq d$ et soit $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$. Comme f est continue : $\underbrace{f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)}$
$$\Downarrow$$
$f_i(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f_i(x_0)$ $\forall 1 \leq i \leq d$

$\Rightarrow f_i(x_n) \to f_i(x_0)$

ce qui montre que f_i est continue. $\square$

Exemple: $f:(E,N) \to \mathbb{C}$ continue si et seulement si $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Re} f$ continues

$\rightarrow$ Cas des applications linéaires :

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow x_n - x_0 \to 0$; $f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow f(x_n - x_0) \to 0$ $\Rightarrow$ (f linéaire : continue sur $E \Leftrightarrow$ continue en 0)

Fin Cours 3

Début Cours 4

Proposition: f linéaire $(E, N_E) \to (F, N_F)$ continue ssi Lipschitzienne ssi $\exists C > 0\ \forall x \in E\ N_F(f(x)) \leq C N_E(x)$

Démo:

$(\Uparrow)$ $\exists C > 0\ \forall x, y \in E\ N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x-y)) \leq C N_E(x-y)$

$(\Leftarrow)$ déjà vu

$(\Rightarrow)$ f est continue donc continue en 0.

Pour $\varepsilon = 1$, $\exists \alpha > 0$ on a : $\forall x \in E\ N_E(x) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x)) < 1$

On prétend que $C := \frac{1}{\alpha}$ convient :

si $x = 0$, alors $N_F(f(0)) = 0 \leq C N_E(0) = 0$

si $x \neq 0$, alors posons $y := \frac{\alpha}{2N_E(x)} x$. D'où

$$N_E(y) = \frac{\alpha}{2N_E(x)} N_E(x) < \alpha \Rightarrow$$

$$N_F(f(y)) = N_F\left(f\left(\frac{\alpha}{2N_E(x)} x\right)\right) = \frac{\alpha}{2N_E(x)} N_F(f(x)) < 1$$

$$\Leftrightarrow N_F(f(x)) < \frac{2}{\alpha} N_E(x) \leq \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{C} N_E(x) \quad \square$$

Thm Soit E ev de dim finie $\dim E = d$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E $= \{e_1, \ldots, e_d\}$

Toute application linéaire $f : (E, N_p^{\mathcal{B}}) \to (F, N_F)$ est continue

Rappel : $N_p^{\mathcal{B}}(x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d) = \|(x_1, \ldots, x_d)\|_p$