Démonstration: Comme ~ est une relation d'équivalence, il suffit de montrer que toute norme $\tilde{N}$ et E est équivalente à N_∞^B où B est une base de E. La base B induit un isomorphisme avec $\mathbb{R}^d$:

On montre donc que toute norme N de $\mathbb{R}^d$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$:

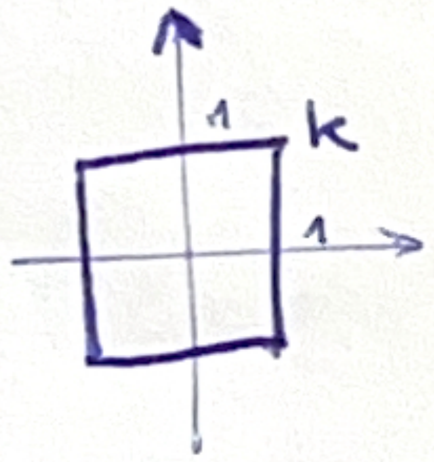
$Id : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^d, N)$ est continue $\Longrightarrow$ Lipschitzienne

dim finie et norme ∞ linéaire

c'est-à-dire $\exists C > 0$, $N(x) \leq C\|x\|_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$\Longrightarrow (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{N} (\mathbb{R}, |\cdot|)$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Continue

Z pas N



On considère $K := \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_\infty = 1\}$

fermé borné dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow$ compact

dim finie

Donc $\exists x_m, x_M \in K$ tq $\forall x \in K$, $\underbrace{N(x_m)}_{A:=} \leq N(x) \leq \underbrace{N(x_M)}_{B:=}$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $A\|x\|_\infty \leq N(x) = \|x\|_\infty N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty}x\right) \leq B\|x\|_\infty$.

Il reste à montrer que $0 < A \leq B$. Par l'absurde, si $A = 0$ alors $N(x_m) = 0 \Rightarrow x_m = 0$: contredit $\|x_m\|_\infty = 1$ et $x_m \neq 0$ □

Corollaire : (E, N) evn ~~fini~~ dim finie

① Complet (Banach)

② compact $\Longleftrightarrow$ fermé borné

③ Toute application linéaire $f : E \to \underbrace{(F, N_F)}_{\text{quelconque}}$ continue

Démo : notions indépendantes de la notion équivalente choisie.
On a montré ①, ② et ③ pour $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ donc vrai pour tout norme par le théorème précédent. □

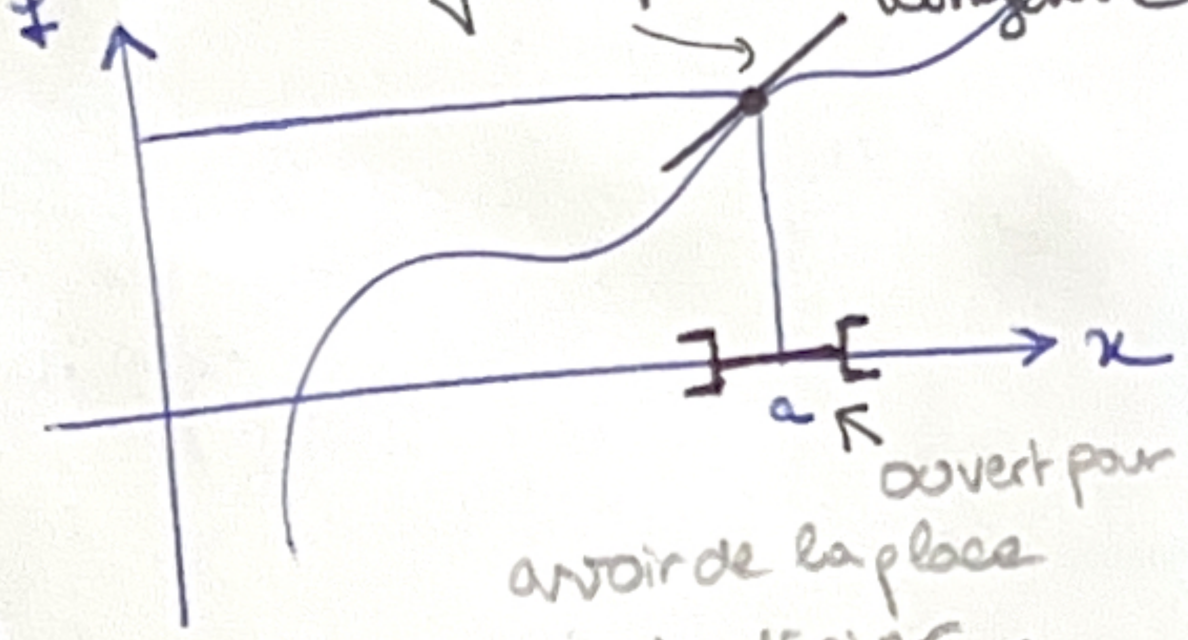
Se demander : "À quoi est utile la dérivée ?"
↳ elle permet une première approximation de f localement autour de a → affine :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a) \times h}_{\text{c'est linéaire}} + o(|h|)}$$

VI Différentiabilité

1) Différentielle

Cas classique : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



But : Généraliser la notion de "dérivée" aux applications entre evns.

$$f : (E, N_E) \to (F, N_F)$$

? "f'" = nombre ?? lequel ??

ex = 16 Bis

?? On pourrait envisager dériver $\underset{E}{f}(a + t\vec{v})$ en $t = 0$ $\to F$

mais alors on obtient un vecteur de F... et ce pour chaque direction $\vec{v}$ ou $E \to F$ ok why not $\Rightarrow$ linéaire

Définition : Soit $f : U \subset (E, N_E) \to (F, N_F)$ est différentiable en $a \in U$ s'il existe

- une application linéaire continue $\varphi : E \to F$
- $r > 0$
- $\varepsilon : B(0, r) \subset E \to F$ tq $\varepsilon(0) = 0$ oui

ouvert pour avoir de la place

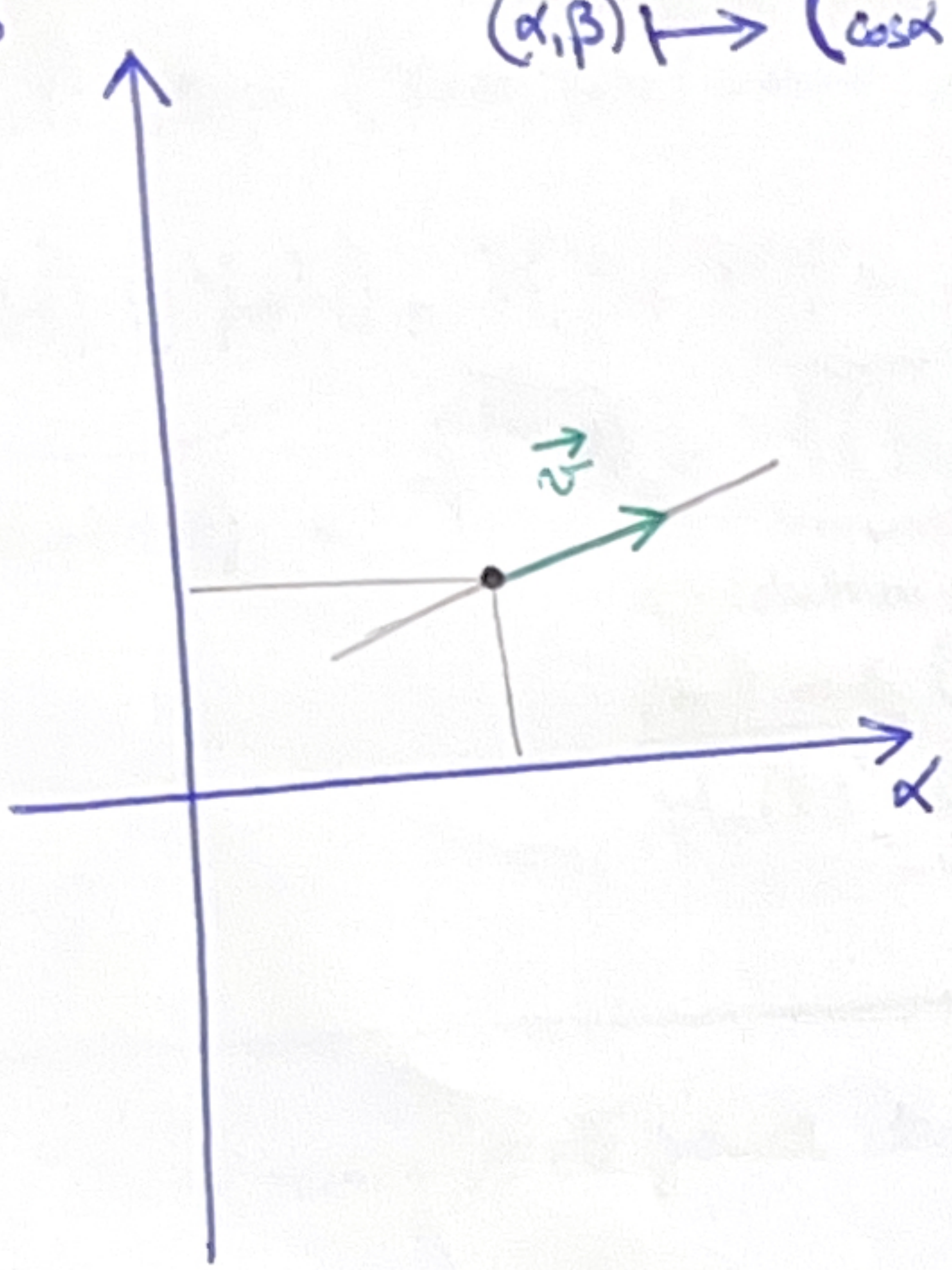
telles que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + N_E(h)\,\varepsilon(h)$ pour $\forall h \in B_E(0, r)$

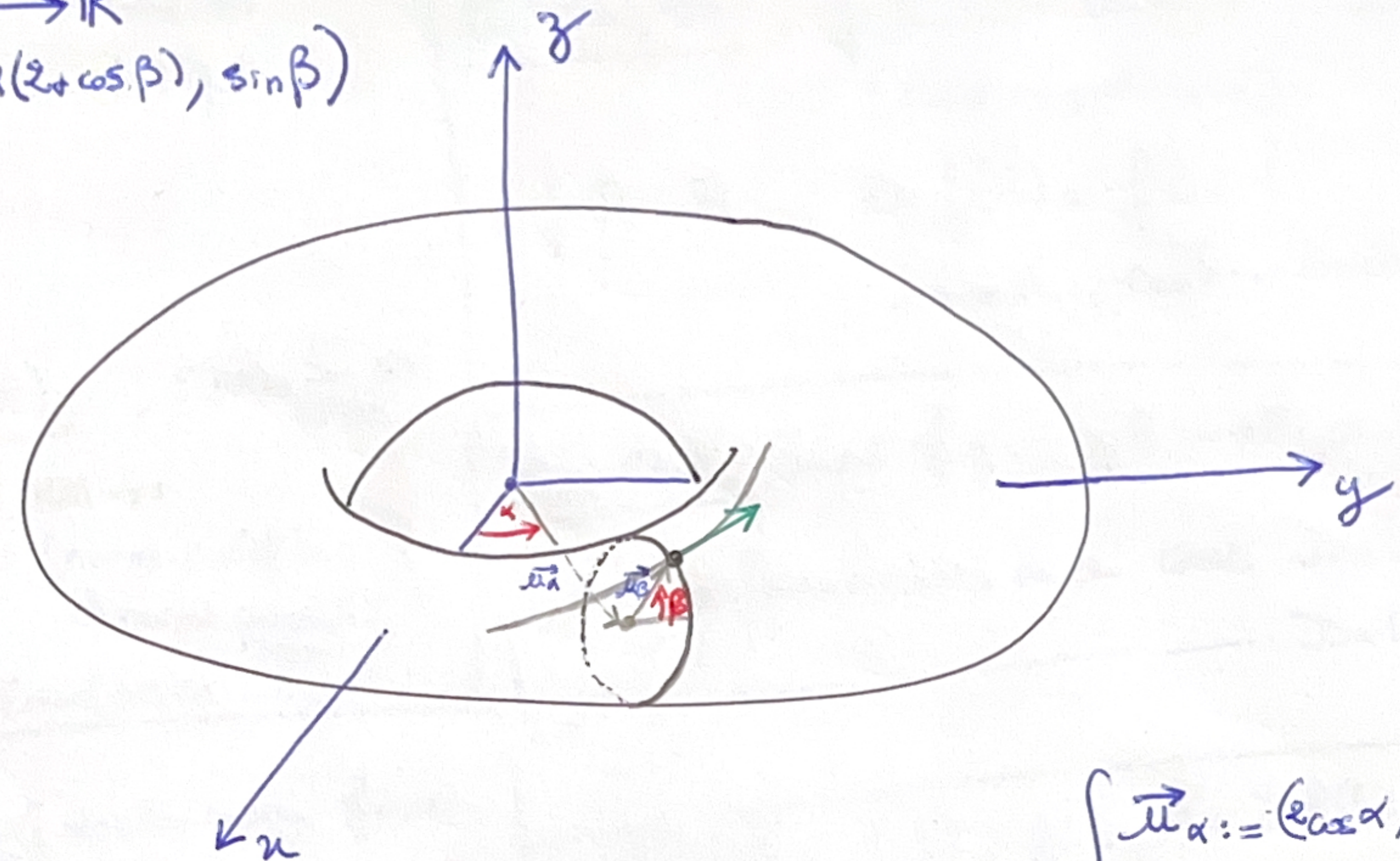
~~ε continue en 0~~ $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $N_E(h) \to 0$

Exemple :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha,\beta) \longmapsto \left(\cos\alpha\,(2+\cos\beta),\ \sin\alpha\,(2+\cos\beta),\ \sin\beta\right)$$





$$\begin{cases} \vec{u}_\alpha := (2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha,\ 0) \\ \vec{u}_\beta := (\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta) \\ f(\alpha,\beta) = \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\beta \end{cases}$$

Exemple ⊛

$\vec{v} = (1,0)$ $\quad f((\alpha,\beta)+t\vec{v}) = f(\alpha+t,\beta) = \left(\cos(\alpha+t)(2+\cos\beta),\ \sin(\alpha+t)(2+\cos\beta),\ \sin\beta\right)$

$$\left(\frac{d}{dt}\cancel{f((\alpha,\beta)+t\vec{v})}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f((\alpha,\beta)+t\vec{v}) - f(\alpha,\beta)\right) = \underline{\left(-\sin\alpha\,(2+\cos\beta),\ \cos\alpha\,(2+\cos\beta),\ 0\right)}$$

$$\frac{d\, f((\alpha,\beta)+t\vec{v})}{dt}(0) =$$

Exemple: Le produit des matrices: $f : M_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$
$(M,N) \longmapsto MN$

en (X,Y), on a $(X+H, Y+K)$ "proche perturbation"

$$\underbrace{(X+H).(Y+K)}_{f((X,Y)+(H,K))} = \underbrace{XY}_{f(X,Y)} + \underbrace{HY + XK}_{\varphi(H,K)} + \underbrace{HK}_{\|(H,K)\|\, \varepsilon(H,K)}$$

$\varepsilon(H,K) = \frac{1}{\|(H,K)\|} HK$

φ : application linéaire continue (dim finie) $M_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$\varepsilon(H,K) \to 0$ quand $(H,K) \to 0$ (norme d'algèbres et norme produit (max))

$\|\varepsilon(H,K)\| \leqslant \min(\|H\|, \|K\|) \longrightarrow 0$.

Rq: • Définition qui dépend des normes, sauf en dimension finie (presque toujours le cas ici)
↳ dans ce cas φ est toujours continue ⟹ hypothèse inutile

Proposition \ Définition: Pour toute application différentiable en un point l'application linéaire φ est unique : on l'appelle la différentielle (totale) de f en a et on la note $\boxed{D_a f}$ (ou df_a, $df(a)$...)
il existe plein de notations dans la littérature...

Démo: Supposons $f(a+h) = f(a) + \varphi_1(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$ $\forall h \in B(0,r_1)$
$= f(a) + \varphi_2(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)$ $\forall h \in B(0,r_2)$

alors, $\forall e \in E$, $f(a+te) - f(a+te) = 0 = t(\varphi_1(e) - \varphi_2(e)) + t^2\|e\|(\varepsilon_1(e) - \varepsilon_2(e))$
$\forall t > 0$ tq $\|e\|t < \min(r, r')$

$\Rightarrow \underbrace{\varphi_1(e) - \varphi_2(e)}_{\Rightarrow\, = 0} = t\|e\|(\varepsilon_2(e) - \varepsilon_1(e)) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ □

Exemples: • f linéaire continue : $D_a f = f$ $\forall a \in E$
($\varepsilon = 0$, r = quelconque)

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $D_a f(h) = f'(a).h$
les seules applications linéaires $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto A \times h$ = multiplication par A

Propriétés: Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ (U ouvert) différentiables en $a \in U$.
→ $f+g$ différentiables en a avec $D_a(f+g) = D_a f + D_a g$
→ λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ — — $D_a(\lambda f) = \lambda D_a f$

Démo: (Exercice) • $(f+g)(a+h) = f(a) + g(a) + D_a f(h) + D_a g(h)$
$+ \|h\|(\underbrace{\varepsilon_f(h) + \varepsilon_g(h)}_{\to 0 \text{ quand } h \to 0})$

• $(\lambda f)(a+h) = \lambda f(a) + \lambda D_a f(h) + \|h\|(\underbrace{\lambda . \varepsilon(h)}_{\to 0 \text{ quand } h \to 0})$ □

Exercice:[1] Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ (U ouvert) différentiables en a.
Montrer que $fg : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable en a et calculer sa différentielle $D_a(fg)$.

Réponse: $D_a fg = f(a) D_a g + g(a) D_a f$
↳ généralise $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g(a)f'(a)$
formule qui

Solution:

$$f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a) + \overbrace{\left(f(a)D_ag(h) + g(a)D_af(h)\right)}^{D_a(fg)(h)=} +$$

$$\underbrace{\|h\|\left(\varepsilon_f(h)(g(a)+D_ag(h)) + \varepsilon_g(h)(f(a)+D_af(h)) + \|h\|\varepsilon_f(h)\varepsilon_g(h) + \frac{1}{\|h\|}D_af(h)\times D_ag(h)\right)}_{\xrightarrow[h\to0]{} 0}$$ □

Démo: Soit $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(a_n) = f(a+\underbrace{a_n-a}_{\to 0}) =$

$$f(a) + \underbrace{D_af(\underbrace{a_n-a}_{\to 0})}_{\to 0 \text{ car } D_af \text{ continue}} + \underbrace{\|a_n-a\|\varepsilon(a_n-a)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$ □

continue ⇐ différentiable / dérivable ⇐ $\mathcal{C}^1$ cas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: f' continue ⇓ vrai?

Definition: $f: U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si l'application différentielle

$U\subset E \to \mathcal{L}(E,F) := \{$applications linéaires continues $E\to F\}$

$a \mapsto D_af$

est continue

Proposition: Soit $f: U\subset E\to F$ différentiable en $a\in U$.

Soit $g: V\subset F\to G$ différentiable en $f(a)\in V$.

La composée $g\circ f: U\subset E\to G$ est différentiable en a et sa différentielle vaut $D_a(g\circ f) = D_{f(a)}g\circ D_af$

Rq: généralise $(g\circ f)' = g'(f(a))\times f'(a)$

Démo:

$$g\circ f(a+h) = g\big(f(a)+\underbrace{D_af(h)+\|h\|\varepsilon_f(h)}_{=k}\big) = g\circ f(a) + \overbrace{D_{f(a)}g(D_af(h))}^{D_a(g\circ f)(h)=} +$$

$$\|h\|_E\underbrace{\left(D_{f(a)}g(\varepsilon_f(h))\right)}_{\xrightarrow[h\to0]{}0} + \underbrace{\|D_af(h)+\|h\|_E\varepsilon_f(h)\|_F\,\varepsilon_g\left(D_af(h)+\|h\|_E\varepsilon_f(h)\right)}_{\|h\|_E \|\underbrace{D_af\left(\frac{1}{\|h\|_E}h\right)}_{\text{borné}}+\underbrace{\varepsilon_f(h)}_{\text{borné}}\|_F\,\underbrace{\varepsilon_g\left(D_af(h)+\|h\|_E\varepsilon_f(h)\right)}_{\xrightarrow[h\to0]{}0}}$$ □

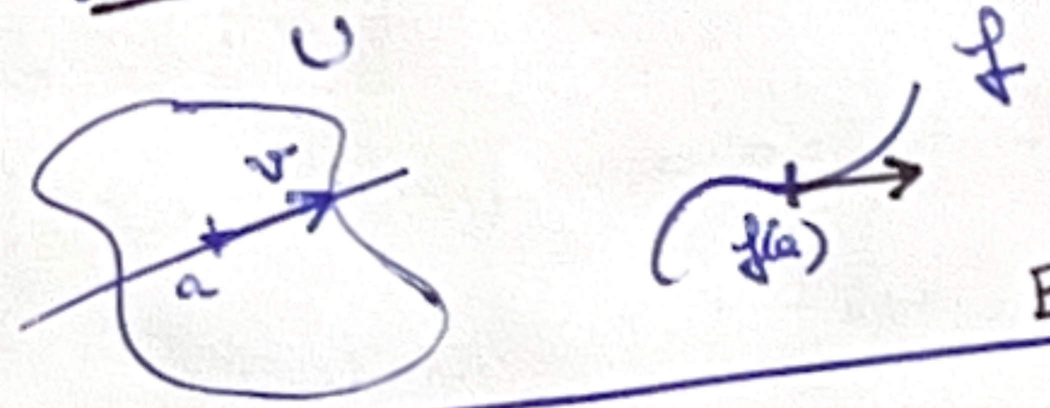
Rq: on retrouve (et généralise) le cas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ diff $\Rightarrow \mathcal{C}^0$

$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ → faux ⇍ $\mathcal{D}'$

Différentielle (totale) = donnée globale (parfois dure à calculer) (toutes les directions)

donnée partielle (?)

Définition: Soit $f: U\subset E\to F$ (U ouvert) dérivable en a selon un vecteur v si $\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(f(a+tv)-f(a)) = \frac{d f(a+tv)}{dt}(0)$ existe ; alors $\underbrace{\qquad}_{\text{dérivée de } f \text{ en } a \text{ dans la direction } v}$ (il existe plein de notations dans la littérature: trop même...)



Exemple ⊛ p160IS

Lemme: f différentiable en a, alors f dérivable en a selon tout vecteur v et la dérivée en a dans la direction $v = D_af(v)$

Démo: $\frac{1}{t}(f(a+tv)-f(a)) = D_af(v) + \|v\|\underbrace{\varepsilon(tv)}_{\xrightarrow[t\to0]{}0}$ □

Exercice 2: Calculer la différentielle de $X\in\mathbb{R}^n \mapsto \sqrt{{}^tX.X}$.

Proposition: f différentiable en a ⟹ f continue en a

⇍ FAUX

Contre-exemple: $f(x)=|x|$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

② La réciproque est fausse : l'existence de dérivées dans toutes les directions $\not\Rightarrow$ f différentiable

(d'où la définition "globale" de différentiable choisie ici)

Exercice[3] On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions

2) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (elle n'est même pas continue!)

↓ Bonne réciproque

$\boxed{\text{Thm}}$ Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{U} \subset E \to F$ et $\dim E$ finie

$\forall \vec{v} \in E$, la dérivée de f dans la direction $\vec{v}$: $U \to F$, $x \mapsto \frac{d f(a+t\vec{v})}{dt}(0)$ est continue

$\Updownarrow$

f de classe C^1 ($\Leftrightarrow f$ dérivable et $D_\cdot f$ continue)

Démo : plus tard application "impossible" car il faudrait calculer une infinité de dérivée, une par chaque $\vec{v} \in E$ .....

Fin Cours 5

$\dim E < +\infty \Rightarrow$ on se ramène à $E = \mathbb{R}^m$ par choix de base.

→ 2) Dérivées partielles

dans ce cas $(E = \mathbb{R}^m)$ dérivées canoniques

Déf [Dérivées partielles] $f : \underset{\text{ouvert}}{U \subset \mathbb{R}^m} \to F$ lorsqu'elles existent, les dérivées dans les directions des vecteurs de la base canonique sont appelées dérivées partielles et notées $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \frac{d f(a+te_i)}{dt}(0)}$

Exercice[4] : calculer $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f}{\partial \beta}$

Rq :
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_m)}{dt}(0)$
- f différentiable $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_a f(e_i)$ et "réciproquement" (donc)

✪ $\boxed{D_a f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i}$, où $dx_i = e_i^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$

base duale (= projection canonique)

Exercices 18, 20

$\boxed{\text{Thm}}$ Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{U \subset \mathbb{R}^m} \to F$

L'application f admet des dérivées partielles continues sur U

$\Updownarrow$ Dans ce cas, on a ✪

L'application f est de classe C^1

Démo : ($\Uparrow$) déjà vu : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_a f(e_i)$: continue en a pour tout $1 \le i \le m$.

($\Downarrow$) [à lire chez soi, pas en cours] On montre d'abord que f est différentiable, i.e. $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \|h\|_E \underset{h \to 0}{\varepsilon(h)}$

On considère ici $N_1(x) = \|x\|_E = \sum_{i=1}^m |x_i|$ (par équivalence des normes en dimension finie).