Chp II ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I) Différentiabilité (serait mieux ici)

II) Équations différentielles

① Introduction

$17^{\text{ème}}$ siècle : Leibniz et Newton fonde le calcul différentiel
↳ résoudre des problèmes de géométrie et de mécanique (céleste).

$18^{\text{ème}}$ siècle : nouvelles équations différentielles (onde, et nouvelles solutions par Euler, Bernoulli(s), Lagrange.

$19^{\text{ème}}$ siècle : • [1822] Équation de la chaleur par Fourier
• Traitement théorique bien fondé : Cauchy (cours à l'École Polytechnique, 1820) et Lipschitz (1868)

$20^{\text{ème}}$ siècle : 1 million de \$ pour la "solution" de l'équation de Navier-Stockes

Exemple 1 : Combien rapporte 10 000 € placés en banque pendant 20 ans avec un taux d'intérêts de 3% ?

↳ modélisation par l'équation : $\boxed{\dfrac{dy}{dt}(t) = 0{,}03\,y(t)}$ où

t : temps ($t = 1 \leftrightarrow 1$ an)

$y : \underset{\text{temps}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\text{valeur}}{\mathbb{R}}$

$y(0) = 10'000$: condition initiale

une solution : $y(t) = c\,e^{0{,}03t}$ (seule ?)

et $y(0) = 10'000 = c$

$y(20) \simeq 18'221$ €

(oui mais si l'inflation est de 7% par an… y a-t-on vraiment gagné ???

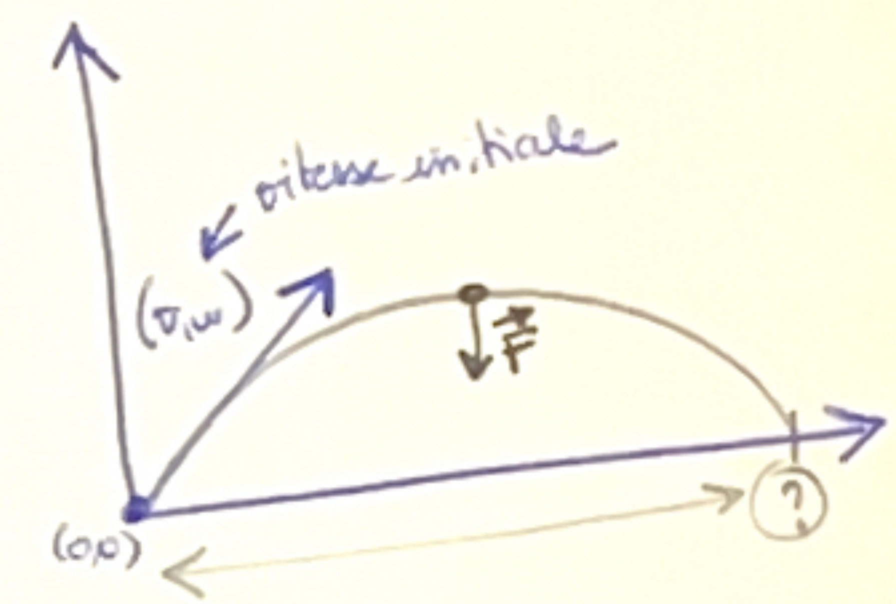
paramètres	valeur	ordre (dérivée)
1	1	1

Exemple 2 : Principe fondamental de la dynamique

⊛ $m\vec{a} = \vec{F}$: Newton [1687 : Philosophiae naturalis principia mathematica]

+ loi universelle de la gravitation : $\vec{F} = G\dfrac{m_1 m_2}{d^2}$. ⊛⊛

Tir de canon :



Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la position de l'obus au temps t.

$\gamma(0) = (0,0)$ & $\dot{\gamma}(0) = \dfrac{d\gamma}{dt}(0) = (v,w)$: conditions initiales

De ⊛ et ⊛⊛, on déduit : $\boxed{\ddot{\gamma}(t) = \dfrac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = (0, -c)} = \underset{\text{gravitation}}{\dfrac{1}{m}\vec{F}}$

$= (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$

"$\Rightarrow$" $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = cst = v \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = -ct + w \end{cases}$ (condition initiale)

"$\Rightarrow$" $\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = -\dfrac{c}{2}t^2 + wt \end{cases}$

para.	val.	ordre
1	2	2

Donc $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \dfrac{2w}{c}$ et $x\left(\dfrac{2w}{c}\right) = \boxed{2\dfrac{wv}{c}}$

Exemple 3 : modèle proie-prédateur

Compagnie de la Baie d'Hudson $19^{\text{ème}}$ siècle :

proies = lièvres : $x(t)$

prédateurs = lynx : $y(t)$

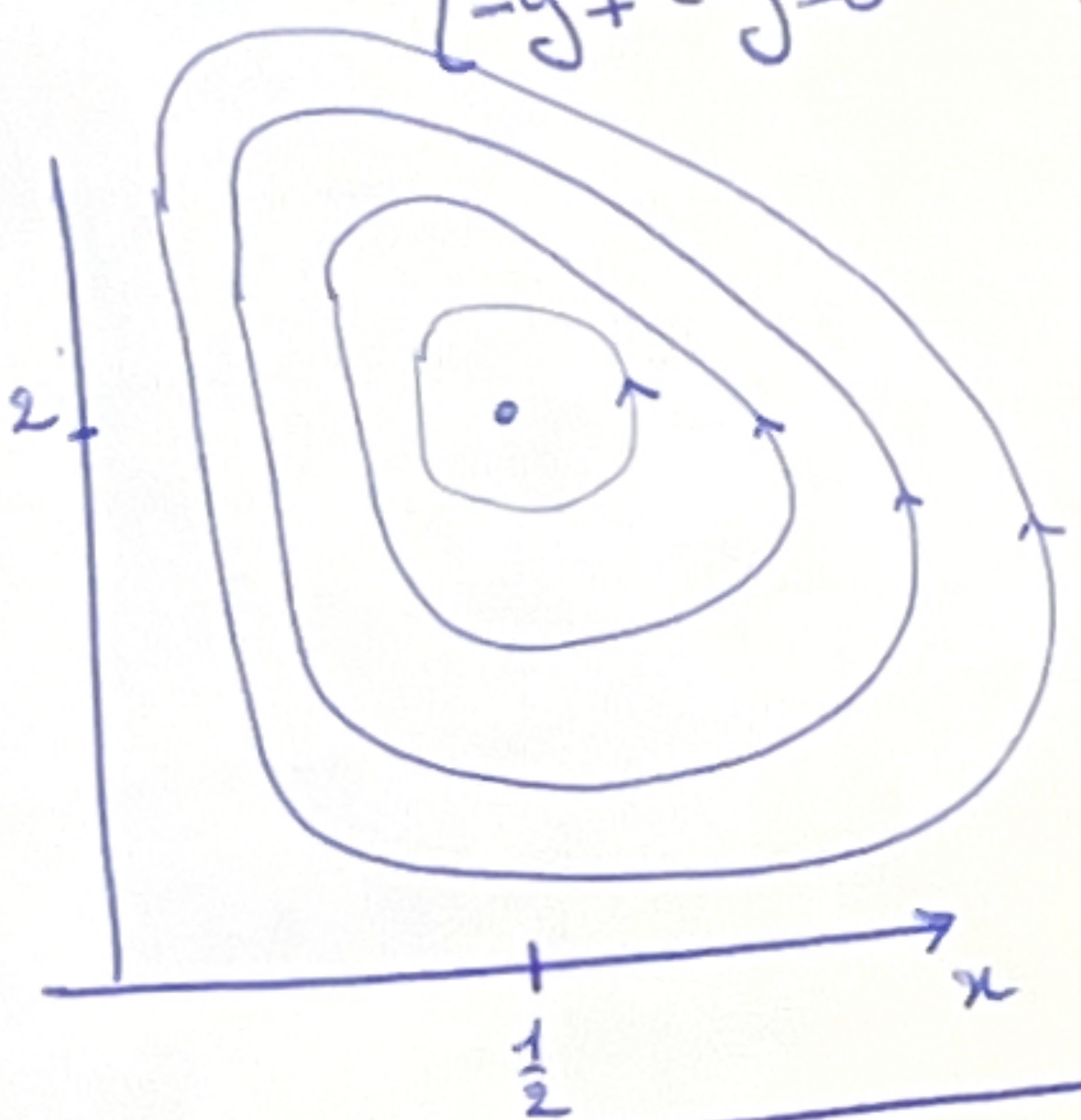
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = \underbrace{2x(t)}_{\text{reproduction}} - \underbrace{x(t)y(t)}_{\text{prédation}} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}(t) = \underbrace{-y(t)}_{\text{"cannibalisme"}} + \underbrace{2x(t)y(t)}_{\text{survie grâce aux lièvres}} \end{cases}$$

Équation de Lotka-Volterra →

$\nexists$ pas de solutions explicites "simples"

↳ mais étude possible : solutions périodiques, stables

autour de $\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ -y + 2xy = 0 \end{cases} \iff$ $(x,y) = (0,0)$: instable ; $(x,y) = (\frac{1}{2}, 2)$: stable



para.	val.	ordre
1	2	1

Exemple 4 : Équation de la chaleur : $T(t,x,y,z)$: température

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

solutions ...

para.	val.	ordre
4	1	2

etc : Équation de Navier-Stokes (mécanique des fluides)

$$\rho\left(\frac{\partial \overset{\text{vélocité}}{v}}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

- Équations de Maxwell (électro-magnétisme)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underset{\text{champ électrique}}{E} = 0 & \nabla \times E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t} \\[2ex] \nabla \cdot \underset{\text{champ magnétique}}{H} = 0 & \nabla \times H = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$$

- Équation de Schrödinger (onde quantique)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underset{\text{Hamiltonien}}{\hat{H}} \overset{\text{fonction d'onde}}{\psi}$$

- Équation de Black-Scholes (prix sur des marchés financiers)

$$\frac{1}{2}\sigma S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial \overset{\text{prix}}{V}}{\partial t} - rV = 0$$

- Équation de Laplace : $\Delta f = 0$

Terminologie : Équations différentielles ← inclut la "différentielle" = dérivées

- 1 variable (t) : Équation différentielle ordinaire (EDO) ← ce cours
- plusieurs variables $(t,x,y..)$: Équations aux dérivées partielles (EDP) ← heu.... plus tard

ordre = plus grand degré de dérivation.

Notion fondamentale (math, physique, chimie, astronomie, ingénierie, économie, biologie, ...)

Mais on ne sait pas toutes les résoudre (en 2023)
↳ explicitement)

(ça n'empêche de chercher des approximations de solutions ni d'étudier le comportement de solutions)

② Étude théorique

$\exists, !$ de solutions ??? ⇒ Besoin de bien définir la notion d'équation différentielle

Définition: . Équation différentielle (résolue) d'ordre n $n \in \mathbb{N}^*$

De la forme $\boxed{y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})}$ ⊛

où $F : \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{R} \times E^n \to E$ ← Banach (typiquement $\mathbb{R}^m$)

. Une solution de ⊛ : application $\varphi : \underset{\text{intervalle de } \mathbb{R}}{I} \to E$, n fois dérivable tq

1) $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$

2) $\forall t \in I$, $\varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$

Ex 1 : $F(t,y) = 0{,}03y$

Ex 2 : $F(t,y,y') = (0,c)$

Ex 3 : $F(t, Y) = \begin{pmatrix} 2x - xy \\ -y + 2xy \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Rq: une équation différentielle non-résolue est de la forme

$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (plus difficile à résoudre et à étudier)

Lemme: Toute équation différentielle (d'ordre n) peut se ramener à une équation d'ordre 1

Démo: Si on pose $\Phi(t) := (\varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$
$I \to E^{(n)}$

et $G : \Omega \subset \mathbb{R} \times E^n \to E^{(n)}$
$(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t, x_0, \dots, x_{n-1}))$

alors $\Phi'(t) = (\varphi'(t), \varphi^{(2)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t), F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)))$
$\Updownarrow$ $= G(t, \Phi(t))$
$\varphi(t)$ solution de ⊛ $\square$

Super Cool! → on peut se restreindre (pour l'étude théorique) au cas $n = 1$

On peut comparer les solutions par la "taille" de l'intervalle I où elles sont définies :

Def: Solution maximale de ⊛ : $\varphi : I \to E$ solution tq il n'existe pas de solution $\psi : J \to E$ avec $I \subsetneq J$.

Problème avec condition initiale :

Def: [Problème de Cauchy] différentielle $F(t, y, \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ ⊛

. Résolution d'une équation différentielle $F(t,y,\dots,y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ avec condition initiale $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$, i.e. les solutions doivent vérifier : $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0) = x_1, \dots,$ $\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

. Unicité des solutions si pour toutes $\varphi : I \to E$ et $\psi : J \to E$ solutions alors $\varphi_{|I \cap J} \equiv \psi_{|I \cap J}$

La grande question : $\exists$ de solutions ???
↓ oui si F est assez régulière

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$,
ouvert

. Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I contenant t_0 et dont t_0 n'est pas au bord et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution du problème de Cauchy : $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$

. De plus, il y a unicité de cette solution : elle est définie sur un intervalle ouvert

$\exists!$ solution maximale → elle est définie sur un intervalle ouvert

Démo : admise (par faute de temps :c) □

Remarques : • hypothèse optimale : F est continue et localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable

• F seulement continue ⇒ $\exists$ mais plus unicité [Peano]

• Couvre le cas des équations différentielles d'ordre n.

Exercice [1] : Montrer que l'équation différentielle

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

admet des solutions mais qui ne sont pas uniques

Exercice [2] : Que peut-on dire d'une solution de l'équation différentielle $y' = ty(y-1)$ qui s'annule en un point $(y(t_0) = 0)$?
Ex 4

Exercices Feuille 2 : Ex 1, 2, 7, 8

Exercice à rédiger (Ex 3) : On considère l'équation différentielle

$$\boxed{y' = y^2 \cos t} \quad (*)$$

1) Que peut-on dire d'une solution qui s'annule en un point ?

2) Déterminer les solutions maximales (si elles existent) du problème de Cauchy associé à $(*)$ pour les conditions initiales → préciser les intervalles de définition

a) $y(0) = \frac{1}{2}$

b) $y(0) = 2$

c) $y(0) = 0$

3) Tracer leurs graphes dans un même repère.

3 Équations différentielles linéaires