Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$,
ouvert

. Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I contenant t_0 et dont t_0 n'est pas au bord et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution du problème de Cauchy : $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$

. De plus, il y a unicité de cette solution : $\exists!$ solution maximale $\to$ elle est définie sur un intervalle ouvert

Démo : admise (par faute de temps :c) $\square$

Remarques : . hypothèse optimale : F est localement continue et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable

. F seulement continue $\Rightarrow \exists$ mais plus unicité [Peano]

. Couvre le cas des équations différentielles d'ordre n.

Exercice 1 : Montrer que l'équation différentielle

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

admet des solutions mais qui ne sont pas uniques

Exercice 2 : Que peut-on dire d'une solution de l'équation différentielle $y' = ty(y-1)$ qui s'annule en un point $(y(t_0) = 0)$?
Ex 4

Exercices Feuille 2 : Ex 1, 2, 7, 8

Exercice à rédiger : (Ex 3) On considère l'équation différentielle

$$\boxed{y' = y^2 \cos t} \quad \circledast$$

1) Que peut-on dire d'une solution qui s'annule en un point ?

2) Déterminer les solutions maximales (si elles existent) du problème de Cauchy associé à $\circledast$ pour les conditions initiales

a) $y(0) = \frac{1}{2}$ $\quad\to$ préciser les intervalles de définition

b) $y(0) = 2$

c) $y(0) = 0$

3) Tracer leurs graphes dans un même repère.

fin Cours 7

③ Équations différentielles linéaires

Exemple type : Équation différentielle

$$\boxed{ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = t^2 - 2t} \quad \text{sur } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Comment traiter cette équation ?

→ Elle n'est pas du type "résolu" ⇒ on considère l'équation différentielle

$$(\pentagon) \quad \boxed{y'' = -\frac{1-2t}{t}y' - \frac{t-1}{t}y + t - 2}$$

pour $t \neq 0$.

on peut dire beaucoup de choses pour les équations de ce type là.

ⓐ Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on travaille sur $\mathbb{R}^m$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

Définition : Une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre n est une équation différentielle du type :

$$(E) \quad \boxed{Y^{(n)} = A_{n-1}(t)Y^{(n-1)} + \dots + A_1(t)Y' + A_0(t)Y + B(t)}$$

où $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} : I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ continues et $B : I \to \mathbb{R}^m$ continue

Terminologie : . $B = 0$: EDL homogène

. $m = 1$: EDL scalaire

. $m \geq 2$: système différentiel linéaire

Ex : $(\pentagon)$ est une EDL scalaire $(m=1)$ d'ordre 2 : $A_0(t) = -\frac{t-1}{t}$, $A_1(t) = -\frac{1-2t}{t}$, $B(t) = t-2$

$I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

→ Réduction de l'ordre n à l'ordre 1 (déjà vu)

La réduction de l'ordre donne ici :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & I_m & & \vdots \\ & & \ddots & I_m & \\ 0 & & & 0 & I_m \\ A_0(t) & A_1(t) & \cdots & & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

dans une écriture par blocs.

Exemple : Pour $(\pentagon)$, cela donne :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t-1}{t} & -\frac{1-2t}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t-2 \end{pmatrix}$$

↳ On considère le système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$(\Delta) \quad \boxed{Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t-1}{t} & -\frac{1-2t}{t} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ t-2 \end{pmatrix}}$$

Théorème Soit l'équation différentielle $Y' = A(t)Y + B(t)$ avec $A : I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^m$ continues. Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^m$, il existe une unique solution $\Phi : I \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Phi(t_0) = X_0$.

Démo : Corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz □

Corollaire : Toute équation différentielle linéaire d'ordre n du type (E) admet une unique solution définie sur I avec condition initiale

$\Phi(t_0)=X_0,\ \Phi'(t_0)=X_1, \dots, \Phi^{(n-1)}(t_0)=X_{n-1}$

Démo : Réduction de l'ordre. $\square$

ici on peut utiliser des résultats d'algèbre linéaire :)

$\boxed{\text{Théorème}}$ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (H) $\boxed{Y'=A(t)Y}$ pour $A : I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^m)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers $\mathbb{R}^m$. de dimension m.

Démo : • L'application nulle : $t\in I \longmapsto 0\in\mathbb{R}^m$ est bien solution.

• Toute combinaison linéaire de solutions est solution :

$(\lambda Y+\mu Z)'=\lambda Y'+\mu Z'=\lambda A(t)Y+\mu A(t)Z=A(t)(\lambda Y+\mu Z)$.

• On considère l'application $\mathcal{S}_H \longrightarrow \mathbb{R}^m$: elle est linéaire.
$\Phi \longmapsto \Phi(t_0)$
Pour $t_0\in I$,

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire montre que c'est un isomorphisme ! donc $\dim(\mathcal{S}_H)=\dim(\mathbb{R}^m)=m$ $\square$

Exemple : On peut vérifier que $\begin{pmatrix} e^t \\ e^t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \ln t\, e^t \\ (\frac{1}{t}+\ln t)e^t\end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes du système différentiel linéaire homogène :

$$\boxed{Y'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-t}{t} & \frac{2t-1}{t}\end{pmatrix}Y} \quad (\Delta_H)$$

Donc toutes les solutions de (Δ_H) sont de la forme $\lambda\begin{pmatrix} e^t \\ e^t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} \ln t\, e^t \\ (\frac{1}{t}+\ln t)e^t\end{pmatrix}$. D'où, toutes les solutions de l'équation différentielle (Δ_H) $y''+\frac{1-2t}{t}y'+\frac{t-1}{t}y=0$ sont de la forme $\lambda e^t+\mu \ln t\, e^t = e^t(\lambda+\mu\ln t)$ pour $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

→ Ex 6 TD2

Corollaire : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène d'ordre n
$Y^{(n)}=A_{n-1}(t)Y^{(n-1)}+\dots+A_0(t)Y$ est un sous-espace vectoriel de dimension nm de l'espace $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}^m)$

Exemple : $n=2$, $m=1$

Proposition : Soit $\Phi_0 : I\to\mathbb{R}^m$ une solution (particulière) de l'équation différentielle linéaire $Y'=A(t)Y+B(t)$.
Alors l'ensemble de ses solutions sont de la forme $\Phi+\Phi_0$ où Φ est une solution de (H)
→ c'est donc un espace affine de dimension m

Démo : $(\Phi+\Phi_0)'=(A(t)\Phi)+(A(t)\Phi_0+B(t))$
$=A(t)(\Phi+\Phi_0)+B(t)$ $\square$

Exemple : on peut vérifier que $\begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (Δ).
Donc les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $\boxed{\lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \ln t\, e^t \\ (\frac{1}{t} + \ln t) e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

D'où les solutions de l'équation différentielle (⬠) sont de la forme $\boxed{(\lambda + \mu \ln t) e^t + t + 1}$.

On en conclut que : $\lambda e^t + t + 1$ est une solution de (✪) sur $\mathbb{R}$ et que $\mu \ln t\, e^t + t + 1$ est une solution de (✪) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ mais "recollable" sur $\mathbb{R}$ ssi $\mu = 0$.

(outil théorique)

Définition : . Soit une EDL homogène

(H) $\boxed{Y' = A(t) Y}$

et soient $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ m solutions de (H). Leur wronskien est l'application $\boxed{W_{\Phi_1, \dots, \Phi_m} : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \det(\Phi_1(t), \dots, \Phi_m(t)) \end{array}}$

. Le wronskien de n solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ d'une équation linéaire scalaire d'ordre n $y^{(n)} = a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + a_{n-2}(t) y^{(n-2)} + \dots + a_0(t) y + b(t)$ est le wronskien des solutions $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ du système différentiel linéaire associé :

$$W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Exemple : $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = \ln t\, e^t$

$$W_{\varphi_1, \varphi_2}(t) = \begin{vmatrix} e^t & \ln t\, e^t \\ e^t & (\frac{1}{t} + \ln t) e^t \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 1 & \ln t \\ 1 & \frac{1}{t} + \ln t \end{vmatrix} = \boxed{\frac{e^t}{t}}$$

Proposition Soient $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ des solutions de (H), le rang des vecteurs $\Phi_1(t), \dots, \Phi_m(t)$ est indépendant de $t \in I$

Dém : Les isomorphismes préservent le rang des familles de vecteurs. Ici $\mathbb{R}^m \xleftarrow[t]{\cong} S_H \xrightarrow[t']{\cong} \mathbb{R}^m$

$\{\Phi_1(t), \dots, \Phi_m(t)\} \leftarrow \{\Phi_1, \dots, \Phi_m\} \rightarrow \{\Phi_1(t'), \dots, \Phi_m(t')\}$

même rang □

Corollaire Soient $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ des solutions de H. Les psse

1) $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ forment une base de solutions de H
2) $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$
3) $\forall t \in I, W(t) \neq 0$

Démo : Corollaire direct de la proposition précédente

1) $\iff rg(\Phi_1,\dots,\Phi_m)=m \iff \forall t\in I, rg(\Phi_1(t),\dots,\Phi_m(t))=m$

$\iff \exists t_0\in I, rg(\Phi_1(t_0),\dots,\Phi_m(t_0))=m$ □

Exemple : $W(t)=\frac{e^t}{t}\neq 0, \forall t\in]0,+\infty[$

Mais comment a-t-on fait pour trouver ces solutions générales et particulière de l'équation différentielle $(\Diamond)$?

ⓑ Pratique

→ Résolution d'équation différentielle scalaire d'ordre 1

(E) $y'=a(t)y+b(t)$ Exemple : $\boxed{y'=-y+\sin t}$

↳ équation homogène associée (H) $y=a(t)y$ Ex : $y'=-y$

Solutions de (H) : ev dim 1 engendré par $e^{\varphi(t)}$ où $\varphi(t)=$ Ex : $\varphi(t)=-t$

Théorème précédent

φ est une primitive de $a(t)$ sur I qui existe que continue

↳ par exemple $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}a(s)ds$ Ex : $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}(-1)ds=-(t-t_0)$

donc solution de (H) : $\boxed{ce^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}}$ Ex : ce^{-t}

Comment trouver une solution particulière de l'équation (E)

↳ Méthode de la variation de la constante : on cherche une solution de la forme $\lambda(t)e^{\varphi(t)}$ car

$(\lambda(t)e^{\varphi(t)})'=(\lambda'(t)+\lambda(t)\varphi'(t))e^{\varphi(t)}=(\lambda'(t)+\lambda(t)a(t))e^{\varphi(t)}$

$=a(t)\lambda(t)e^{\varphi(t)}+\underbrace{\lambda'(t)e^{\varphi(t)}}_{=b(t)}$ donc $\lambda(t)e^{\varphi(t)}$ solution de (E) ssi $\iff \lambda(t)$ primitive de $b(t)e^{-\varphi(t)}$

Exemple : $\lambda'(t)e^{-t}=\sin t \iff \lambda'(t)=\sin t\, e^{t}$

$\iff \lambda(t)=\lambda_0+e^t\frac{\sin t-\cos t}{2} \Rightarrow \frac{\sin t-\cos t}{2}$ est une solution particulière de (E)

Donc l'ensemble des solutions de (E) sont de la forme $\boxed{ce^{-t}+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)}$

Exercice : Résoudre l'équation différentielle

(E) $(1+t^2)y'=ty+(1+t^2)$

→ Cas des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

(E) $Y'=A(t)Y+B(t) \xrightarrow[\text{homogène}]{\text{équation}}$ (H) $Y'=A(t)Y$

Pour $m\geq 2$, " pas de méthode générale de résolution de (H) ", si

ce n'est $e^{\int_{t_0}^{t}A(s)ds}$ ...

exponentielle intégrale matrice

→ Donc on cherche des solutions " à la main".

Puis, on procède encore à la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E) : Si $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ sont des solutions de (H), on considère

$\alpha_1(t)\Phi_1(t) + \dots + \alpha_m(t)\Phi_m(t)$

Exemple: Soit (E) $\boxed{y'' + 2y' + y = te^t}$ et

$$(H) \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

On "voit" que e^{-t} et te^{-t} sont deux solutions linéairement indépendantes de (H).

On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme $\lambda(t)e^{-t} + \mu(t)te^{-t}$, ce qui donne soit en prenant $\mu = 0$:

$e^{-t}(\lambda''(t) + \mu''(t)\times t + 2\mu'(t)) = te^{t}$

$\lambda''(t) = te^{2t}$ que l'on intègre deux fois pour donner

$\boxed{\lambda(t) = \frac{t-1}{4}e^{2t}}$ Au final, les solutions de (E) sont $\boxed{ae^{-t} + bte^{-t} + \frac{t-1}{4}e^{t}}$

Exercice: Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ t^2y'' - 2y = 3t^2$$

Exercice 11

→ Abaissement de l'ordre

Pour une EDL scalaire homogène d'ordre n : $y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y$

Si on connait une solution φ alors on peut abaisser l'ordre en cherchant une solution de la forme $\psi = f\varphi$

↳ (Calculs directs) f' est solution d'une EDL scalaire homogène d'ordre (n-1)

Exercice 15

→ Changement de variable : Exercice 16

→ Résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1 à matrice A(t) constante : (H). $Y' = AY$ avec $A \in M_m(\mathbb{R})$

"Rappel" : exponentielle de matrice

$$e^{A} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

Proposition Les solutions de (H) sont de la forme $\Phi(t) = \Phi_0 e^{tA}$ où $\Phi(0) = \Phi_0 \in \mathbb{R}^m$