Démo: Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit de montrer que $e^{tA}\Phi_0$ est solution car ce dernier garantit l'unicité.

Comme la multiplication par un vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une application continue, on a

$$e^{tA}\Phi_0 = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(tA)^n\right)\Phi_0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(tA)^n\Phi_0$$

On peut montrer que l'opération de dérivation commute à la limite (somme) ici, d'où

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{n\geq 0}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{n!}(tA)^n\Phi_0\right)}_{=\frac{1}{n!}t^n A^n\Phi_0} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n\Phi_0$$

$$= A\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(tA)^n\Phi_0\right) = A\Phi(t) \quad \square$$

Exemple: On considère le système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$,

c'est-à-dire $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} Y$.

On cherche donc à calculer $e^{tA} = e^{\begin{pmatrix} t & -t \\ 2t & -t \end{pmatrix}}$ ...

Cas (sympathique) où la matrice A est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

↳ il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$, faite d'une base de vecteurs propres, telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D \iff A = PDP^{-1}$$

Remarques: ① $(PDP^{-1})^k = PD\cancel{P^{-1}P}D\cancel{P^{-1}} \cdots \cancel{P}DP^{-1}$
$= PD^kP^{-1}$

② $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

③ L'application linéaire $H \longmapsto PHP^{-1}$ est continue, donc

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$: 2 valeurs propres i et $-i$

2 vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$
↳ base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix},\quad P^{-1} = \frac{1}{2(i+1)}\begin{pmatrix} 2 & i-1 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

D'où $e^{tA} = P e^{\begin{pmatrix} ti & 0 \\ 0 & -ti \end{pmatrix}} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ base de solutions de l'équation $Y' = AY$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}}$$

Exercices 11, 12, 13

$\longrightarrow$ Cas particulier des équations différentielles scalaires d'ordre n à coefficients constants : $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$ (E)

Si on la réduit à l'ordre 1, cela donne pour $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$:

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A :=} Y$$

On sait calculer le polynôme caractéristique de A ; il vaut $\chi_A(X) = (-1)^n (X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0)$

Def: On appelle $P(X) := X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ le polynôme caractéristique de l'équation (E)

Ce polynôme caractéristique se factorise dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) sous la forme $P(X) = \sum_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$.

La matrice A se trigonalise donc sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

et donc sous exponentielle est donnée par

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} \begin{matrix} e^{t\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_1} \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} e^{t\lambda_r} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_r} \end{matrix} \end{pmatrix} P^{-1}$$

on voit donc que $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}$ sont solutions de (E) et on est incité à chercher des solutions de la forme $t^k e^{t\lambda_i}$ pour $0 \leq k < m_i$

Cela va en effet donner toutes les solutions de l'équation (E).

Proposition Les fonctions de la forme

$t^k e^{t\lambda_i}$ pour λ_i valeurs propres ($\mathbb{C}$) de A

et $0 \leq k <$ multiplicité de λ_i

forment une base de solutions de l'équation (E).

Démo: • Montrons d'abord que $\varphi(t) = t^k e^{t\lambda_i}$ est

solution de (E) : on a

$\varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_0\varphi(t) =$

$\left(t^k e^{t\lambda_i}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(t^k e^{t\lambda_i}\right)^{(n-1)} + \dots + a_0 t^k e^{t\lambda_i} =$

$$\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\left(t^k\right)^{(\ell)}\left(e^{t\lambda_i}\right)^{(n-\ell)} + a_{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}\left(t^k\right)^{(\ell)}\left(e^{t\lambda_i}\right)^{(n-1-\ell)} + \dots + a_0 t^k e^{t\lambda_i} =$$

$$e^{t\lambda_i}\left(\begin{array}{ll} \ell=0 \to & t^k\underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\right)}_{P(\lambda)} \\ \ell=1 \to & kt^{k-1}\underbrace{\left(n\lambda^{n-1} + a_{n-1}(n-1)\lambda^{n-2} + \dots + a_1\right)}_{P'(\lambda)} \\ & \vdots \\ \ell=k \to & \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)\lambda^{n-k} + a_{n-1}(n-1)\dots(n-k)\lambda^{n-k-1} + \dots + k!a_k}_{P^{(k)}(\lambda)} \end{array}\right)$$

$$= e^{t\lambda_i}\left(\underbrace{P(\lambda)}_{0}t^k + \underbrace{P'(\lambda)}_{0}kt^{k-1} + \dots + \underbrace{P^{(k)}(\lambda)}_{0}\right)$$

car λ est racine d'ordre $m_i > k$ du polynôme P.

• Nous avons donc trouvé n solutions.

Il reste à montrer qu'elles sont indépendantes et on aura fini car l'espace vectoriel des solutions est de dimension n. → Exercice

(On pourra s'amuser à calculer leur wronskien en 0) □

Exemple: Les solutions de l'équation différentielle $\boxed{y^{(3)} - 3y' + 2y = 0}$

sont de la forme $\boxed{(a+bt)e^t + ce^{-2t}}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

car $P(X) = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$

→ Exercice 14