Corrigé de l'examen partiel Mars 2008

Exercice 1.

Soit $(G,.)$ un groupe. Soient N et H deux sous-groupes de G tels que N soit distingué. On considère le sous-ensemble suivant de G :

$$NH := \{n.h\,;\, n \in N, h \in H\}.$$

(1) Monter que NH est un sous-groupe de G.

Comme N et H sont des sous-groupes de G, le neutre 1 de G appartient à N et à H. D'où $1.1 = 1 \in NH$.
Soient $n_1.h_1$ et $n_2.h_2$ deux éléments de NH, avec $n_1, n_2 \in N$ et $h_1, h_2 \in H$. On a

$$n_1.h_1.n_2.h_2 = \underbrace{n_1.h_1.n_2.h_1^{-1}}_{\in N}.\underbrace{h_1.h_2}_{\in H} \in NH,$$

où $n_1.h_1.n_2.h_1^{-1} \in N$ parce que N est un sous-groupe distingué de G.
Enfin, pour $n.h \in NH$ avec $n \in N$ et $h \in H$, on a

$$(n.h)^{-1} = h^{-1}.n^{-1} = \underbrace{h^{-1}.n^{-1}.h}_{\in N}.\underbrace{h^{-1}}_{\in H} \in NH,$$

où $h^{-1}.n^{-1}.h \in N$ parce que N est un sous-groupe distingué de G.
Donc NH est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que N et H sont des sous-groupes de NH et que N est un sous-groupe distingué de NH.

Chaque élément n de N s'écrit $n.1$ avec $1 \in H$ donc $n = n.1$ appartient à NH. Donc $N \subset HN$ et N est un sous-groupe de NH. (On procède de même pour H). Comme N est un sous-groupe distingué de G, N est encore un sous-groupe distingué de NH ($xNx^{-1} \subset N$ pour tout $x \in NH$ puis que cela est vrai pour tout $x \in G$).

(3) Montrer que l'écriture $x = n.h$ pour $x \in NH$ est unique si et seulement si $N \cap H = \{1\}$.

$\Longrightarrow$ Supposons l'écriture unique et soit $x \in N \cap H$. Comme on a $x = x.1 = 1.x$, alors par unicité $x = 1$.
$\Longleftarrow$ Supposons $N \cap H = \{1\}$ et soient $n_1.h_1 = n_2.h_2$, avec $n_1, n_2 \in N$ et $h_1, h_2 \in H$. En multipliant a gauche par n_1^{-1} et à droite par h_2^{-1}, on trouve $h_1.h_2^{-1} = n_1^{-1}.n_2 \in N \cap H$. Donc $h_1.h_2^{-1} = n_1^{-1}.n_2 = 1$, ce qui donne $n_1 = n_2$ et $h_1 = h_2$.

Jusqu'à la fin de l'exercice, on se place dans le cas où $N \cap H = \{1\}$.

(4) Construire un isomorphisme $NH/N \xrightarrow{\sim} H$.
<u>Indication</u> : On pourra commencer par construire un morphisme de la forme $NH \to H$.

On considère l'application $\varphi : NH \to H$ définie par $\varphi(n.h) := h$. Cette application est bien définie car l'écriture $n.h$, pour tout élément de NH, est unique (sinon on aurait plusieurs images possibles pour φ !). Cette application est un morphisme de groupes :

$$\varphi\big((n_1.h_1).(n_2.h_2)\big) = \varphi\big((n_1.h_1.n_2.h_1^{-1}).(h_1.h_2)\big) = h_1.h_2 = \varphi(n_1.h_1).\varphi(n_2.h_2).$$

Le noyau de φ est $\mathrm{Ker}(\varphi) = N$, donc, par théorème du cours l'application φ passe au quotient en un morphisme injectif $\bar{\varphi}$:

$$\begin{tikzcd} NH \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & NH/N \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Comme φ est surjective, le morphisme $\bar{\varphi}$ l'est aussi, toujours par théorème du cours. Donc $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme.

(5) On suppose que la restriction à H de la projection canonique $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que H est un système de représentants des classes modulo N. Montrer que $NH = G$.

Il suffit de montrer que $G \subset NH$. Soit $x \in G$. Comme N est un sous-groupe distingué de G, toute classe à gauche hN est égale à sa classe à droite Nh. Comme H est un système de représentants des classes à gauche modulo N, c'est donc aussi un système de reprèsentants des classes à droite modulo N. Or les classes à droite forment une partition de G donc x appartient à une de ces classes, disons Nh avec $h \in H$. Ceci implique que $x \in NH$.

(6) On rappelle que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ composé des permutations paires : $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n\,;\, \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$.
Donner un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_n$ tel que $\mathfrak{S}_n = \mathcal{A}_n H$.

On va appliquer la question précédente à $G = \mathfrak{S}_n$ et $N = \mathcal{A}_n$. Il y a deux classes modulo $\mathcal{A}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$: celle constituée des permutations paires ($\mathcal{A}_n$) et celle constituée des permutations impaires. Un système de représentants est, par exemple, le sous-groupe $H = \{\mathrm{id}, (12)\}$.

Exercice 2.

On considère les deux matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'ordre de α de β et de $\alpha\beta$.

L'ordre de α et de β est 2. L'ordre de $\alpha\beta$ est 4.

(2) Supposons que le sous-groupe $\mathbb{B}_2 :=< \alpha, \beta >$ de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par α et β soit de cardinal fini, que pouvez-vous dire sur ce cardinal ?

D'après le théorème de Lagrande on sait que le cardinal du sous-groupe de $\mathbb{B}_2$ engendré par un élément divise le cardinal de $\mathbb{B}_2$. Donc l'ordre de α, de β et de $\alpha\beta$ divisent le cardinal de $\mathbb{B}_2$. Par la question précédente, on sait donc que le cardinal de $\mathbb{B}_2$, s'il est fini, est un multiple de 4.

(3) Donner une relation entre $\alpha\beta\alpha\beta$ et $\beta\alpha\beta\alpha$.

On a $\alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha$.

(4) Expliciter le sous-groupe $\mathbb{B}_2$ engendré par α et β. Donner la liste des éléments qu'il contient sous la forme de mots en α et β.

On va montrer que $\mathbb{B}_2 = G$, où

$$G := \{I, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta, \alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha\}$$

(soit un groupe à 8 éléments). Si un groupe contient α et β, il contient tous les éléments de G, Donc $G \subset \mathbb{B}_2$.

Il reste à montrer que G est un groupe. Comme G est un sous-ensemble du groupe $GL_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que G en est un sous-groupe :

Le neutre I appartient à G.

Soient x et y deux éléments de G. Ce sont dont des mots en α β, avec ces deux lettres alternèes, de longueur ≤ 4. On peut remarquer que dans le produit xy soit deux mêmes lettres se suivent et donc se simplifient ($\alpha^2 = \beta^2 = I$) soit on peut changer le mot $\alpha\beta\alpha\beta$ en $\beta\alpha\beta\alpha$ et inversement, ce qui produit aussi des simplifications. Au final, xy est égal à un mot avec moins de 4 lettres.

L'ensemble G est stable par l'inverse. L'inverse de α, β, $\alpha\beta\alpha$, $\beta\alpha\beta$, $\alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha$ est lui-même (éléments d'ordre 2). L'inverse de $\alpha\beta$ est $\beta\alpha$ et vice versa.

Au final, G est le plus petit sous-groupe possédant α et β, donc $\mathbb{B}_2 = G$.

(5) Donner la liste des sous-groupes de $\mathbb{B}_2$.

Les sous-groupes de $\mathbb{B}_2$ sont :

$\{I\}$, $\{I, \alpha\}$, $\{I, \beta\}$, $\{I, \alpha\beta\alpha\}$, $\{I, \beta\alpha\beta\}$, $\{I, \beta\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha\beta\}$,
$\{I, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\alpha\}$, $\{I, \alpha, \beta\alpha\beta, \beta\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha\beta\}$, $\{I, \beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha\beta\}$, $\mathbb{B}_2$.

(6) On rappelle que $\mathbb{H}_8$ est le groupe à 8 éléments suivant

$$\mathbb{H}_8 := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\},$$

avec pour relations

$$\begin{cases} AB = C, & A^2 = -I, & AB = -BA, \\ BC = A, & B^2 = -I, & BC = -CB, \\ CA = B, & C^2 = -I, & CA = -AC. \end{cases}$$

Est-ce-que $\mathbb{B}_2$ est isomorphe à $\mathbb{H}_8$?

Dans $\mathbb{B}_2$, il y a 5 éléments d'ordre 2 et 2 élements d'ordre 4. Or, dans $\mathbb{H}_8$, il y a 1 élément d'odre 2 et 6 éléments d'ordre 4. Ces deux groupes ne peuvent donc pas être isomorphes.

(7) On considère le sous-groupe $N := \{I, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\}$. Montrer qu'il est distingué dans $\mathbb{B}_2$.

Pour tout $x \in \{\alpha, \beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta\} = \mathbb{B}_2 - N$, on vérifie que $xNx^{-1} \subset N$.

(8) Montrer que $\mathbb{B}_2/N$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{B}_2$, que l'on précisera.

Le quotient $\mathbb{B}_2/N$ contient deux classes modulo N : $N = \{I, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\}$ et $\{\alpha, \beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta\}$. on peut prendre comme système de représentants l'ensemble $H = \{I, \alpha\}$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{B}_2$. Donc le quotient $\mathbb{B}_2/N$ est isomorphe à H.

(9) Est-ce-que $\mathbb{B}_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Comme $\mathbb{B}_2$ n'est pas abélien ($\alpha\beta \neq \beta\alpha$) et comme $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est abélien, ces deux groupes ne peuvent pas être isomorphes.

On considère l'action naturelle de $\mathbb{B}_2$ sur les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$: pour $M \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma \in \mathbb{B}_2 \subset GL_2(\mathbb{R})$, on définit $\gamma.M := \gamma(M)$, où γ est vu comme l'isomorphisme associé dans la base canonique.

(10) Pour tout vecteur M de $\mathbb{R}^2$, décrire son orbite pour l'action de $\mathbb{B}_2$. Combien contient-elle de points?

<u>Indication</u> : On pourra distinguer deux cas. (Un dessin sera apprécié).

Soit $M = (x, y)$ un point du plan.

Si $|x| \neq |y|$, alors l'orbite de M sous l'action de $\mathbb{B}_2$ est composée des points suivants

$$(\pm x, \pm y) \quad (\pm y, \pm x)$$

qui sont au nombre de 8 est qui forment les sommets d'un octogone.

Si $|x| = |y|$, alors l'orbite de M sous l'action de $\mathbb{B}_2$ est composée des points suivants

$$(\pm x, \pm x)$$

qui sont au nombre de 4 est qui forment les sommets d'un carré.