ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE

EXAMEN FINAL Avril 2008

Il sera tenu compte dans le barème du soin et de la rédaction. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.
Soit A un corps, montrer que l'anneau $A[X]$ des polynômes à une variable à coefficients dans A est un anneau principal.

Exercice 1.
Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre. Montrer que si $A[X]$ est un anneau principal alors A est un corps.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ suivant :

$$\mathbb{Z}_2 := \left\{ \frac{a}{2^k} \,;\, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-il intègre ?

(2) Déterminer l'ensemble des unités de $\mathbb{Z}_2$. Montrer que le groupe des unités $(\mathbb{Z}_2^\times, *)$ de $\mathbb{Z}_2$ est isomorphe au produit cartésien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(3) Un élément irréductible de $\mathbb{Z}$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}_2$? Quels sont les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}_2$. En donner une famille de représentants.

(4) Montrer directement à partir de la définition d'anneau factoriel que $\mathbb{Z}_2$ est un anneau factoriel.

(5) Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est un anneau principal.

On considère l'inclusion naturelle $i : \mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}_2$.

(6) Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer que pour tout morphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z} \to A$ tel que $f(2)$ soit inversible dans A, il existe un unique morphisme d'anneaux $\bar{f} : \mathbb{Z}_2 \to A$ tel que $f = \bar{f} \circ i$.

Soit p un nombre premier. On considère maintenant le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ suivant :

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \,;\, a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\},$$

où p ne divise pas le dénominateur b.

(7) Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Déterminer les unités de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
On considère l'idéal $\mathfrak{m}_p$ engendré par $p = \frac{p}{1}$ dans $\mathbb{Z}_{(p)}$.

(8) Montrer que $\mathfrak{m}_p$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

(9) Montrer que $\mathfrak{m}_p$ est l'unique idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Exercice 3.
On considère l'indicatrice d'Euler, φ qui définie par $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$, c'est-à-dire le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que $\varphi(n)$ est égal au nombre de nombres $1 \leq a \leq n$ premiers avec n.

(2) Soit p un nombre premier. Montrer que $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que tout nombre a premier avec n vérifie

$$a^{n!} \equiv 1_{[n]}.$$