Université de Nice Sophia-Antipolis — Licence de Mathématiques, 3ème année

ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE

EXAMEN BIS juin 2008

Il sera tenu compte dans le barème du soin et de la rédaction. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.
Énoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.

Exercice 1.

(1) Citer et démontrer le théorème de Wilson.

(2) Soit n un entier naturel non premier et différent de 4. Que vaut $(n-1)!$ modulo n ? [Démontrer votre résultat.]

(3) Soit p un nombre premier impair. On considère l'ensemble $I := \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Montrer que pour tout $k \in I$, il existe un unique $i_k \in I$ tel que $k.i_k \equiv 1_{[p]}$.

(4) Montrer que $i_k \neq k$ sauf pour $k = 1$ et $k = p-1$.

(5) L'application $\iota : I \to I$ définie par $\iota(k) := i_k$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(6) Soit p un nombre premier impair. Montrer que le numérateur de $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{p-1}$ est divisible par p.

Exercice 2.

(1) Montrer que l'application $\pi : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}(T)$ définie par

$$P(X,Y) \mapsto P(T, \frac{1}{T})$$

est un morphisme d'anneaux.

(2) On considère l'image de π que l'on note $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}] := \mathrm{Im}(\pi)$. Montrer que $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est un anneau.

(3) Soit A un anneau et soit α une unité de A. Montrer que tout morphisme d'anneaux $f : \mathbb{C}[X,Y] \to A$ tel que $f(X) = \alpha$ et $f(Y) = \alpha^{-1}$ se factorise de manière unique par π.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[X,Y] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C}[T, \frac{1}{T}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

(4) L'anneau $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est-il intègre ?

(5) Déterminer les unités et les éléments irreductibles de $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$. Donner une famille de reṕresentants de ces irréductibles.

(6) Montrer directement à partir de la définition d'anneau factoriel que $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est un anneau factoriel.

(7) Montrer directement à partir de la définition d'anneau principal que $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est un anneau principal.

(8) Montrer que $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T}]$ est un anneau euclidien.

(9) Quelle est la hiérarchie entre les trois dernières notions : factoriel, principal et euclidien ?

(10) Décrivez l'anneau $\mathbb{C}[T, \frac{1}{T^3}]$ qui est défini comme l'image de l'application

$$\omega : \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}(T), \quad \omega(P) := P(T, \frac{1}{T^3}).$$

Exercice 3.

Soit A un anneau intégre.

(1) Soit $P \in A[X]$ un polynôme non nul à coefficients dans A. Montrer que ξ est une racine de P si et seulement si l'idéal engendré par P et par $X - \xi$ est égal à l'idéal engendré par $X - \xi$, c'est-à-dire $(P,\, X - \xi) = (X - \xi)$.

(2) Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X, Y]$ de degré d en Y strictement positif. Montrer qu'il existe au moins un $\xi \in \mathbb{K}$ tel que $P(\xi, Y)$ soit de degré d dans $\mathbb{K}[Y]$.

(3) Montrer que l'idéal principal (P) n'est pas maximal dans $\mathbb{K}[X, Y]$.