EXAMEN PARTIEL Mars 2008

Il sera tenu compte dans le barème du soin et de la rédaction. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.

(1) Donner la définition d'une action de groupes fidèle.

(2) Donner la démonstration du théorème de Cayley : Tout groupe fini est un sous-groupe d'un groupe de permutation $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 1.

Soit $(G, .)$ un groupe. Soient N et H deux sous-groupes de G tels que N soit distingué. On considère le sous-ensemble suivant de G :

$$NH := \{n.h\,;\, n \in N, h \in H\}.$$

(1) Monter que NH est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que N et H sont des sous-groupes de NH et que N est un sous-groupe distingué de NH.

(3) Montrer que l'écriture $x = n.h$ pour $x \in NH$ est unique si et seulement si $N \cap H = \{1\}$.
Jusqu'à la fin de l'exercice, on se place dans le cas où $N \cap H = \{1\}$.

(4) Construire un isomorphisme $NH/N \xrightarrow{\sim} H$.
Indication : On pourra commencer par construire un morphisme de la forme $NH \to H$.

(5) On suppose que la restriction à H de la projection canonique $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que H est un système de représentants des classes modulo N. Montrer que $NH = G$.

(6) On rappelle que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ composé des permutations paires : $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n\,;\, \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$.
Donner un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_n$ tel que $\mathfrak{S}_n = \mathcal{A}_n H$.

Exercice 2.

On considère les deux matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'ordre de α de β et de $\alpha\beta$.

(2) Supposons que le sous-groupe $\mathbb{B}_2 :=< \alpha, \beta >$ de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par α et β soit de cardinal fini, que pouvez-vous dire sur ce cardinal ?

(3) Donner une relation entre $\alpha\beta\alpha\beta$ et $\beta\alpha\beta\alpha$.

(4) Expliciter le sous-groupe $\mathbb{B}_2$ engendré par α et β. Donner la liste des éléments qu'il contient sous la forme de mots en α et β.

(5) Donner la liste des sous-groupes de $\mathbb{B}_2$.

(6) On rappelle que $\mathbb{H}_8$ est le groupe à 8 éléments suivant

$$\mathbb{H}_8 := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\},$$

avec pour relations

$$\begin{cases} AB = C, & A^2 = -I, & AB = -BA, \\ BC = A, & B^2 = -I, & BC = -CB, \\ CA = B, & C^2 = -I, & CA = -AC. \end{cases}$$

Est-ce-que $\mathbb{B}_2$ est isomorphe à $\mathbb{H}_8$?

(7) On considère le sous-groupe $N := \{I, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\}$. Montrer qu'il est distingué dans $\mathbb{B}_2$.

(8) Montrer que $\mathbb{B}_2/N$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{B}_2$, que l'on précisera.

(9) Est-ce-que $\mathbb{B}_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

On considère l'action naturelle de $\mathbb{B}_2$ sur les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$: pour $M \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma \in \mathbb{B}_2 \subset GL_2(\mathbb{R})$, on définit $\gamma.M := \gamma(M)$, où γ est vu comme l'isomorphisme associé dans la base canonique.

(10) Pour tout vecteur M de $\mathbb{R}^2$, décrire son orbite pour l'action de $\mathbb{B}_2$. Combien contient-elle de points?

Indication : On pourra distinguer deux cas. (Un dessin sera apprécié).