FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

GÉNÉRATEURS D'UN GROUPE

Exercice 1 (Générateurs de $\mathbb{S}_n$)**.**

(1) Soit $\sigma \in \mathbb{S}_n$ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ et soit $(a_1, \ldots, a_k)$ un cycle de longueur k de $\mathbb{S}_n$, avec $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$. Que vaut le conjugué $\sigma(a_1, \ldots, a_k)\sigma^{-1}$?

(2) Montrer que les familles suivantes sont des systèmes de générateurs du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$.

- $S_1 = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)\}$.
- $S_2 = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)\}$.
- $S_3 = \{(1, 2), (1, 2, 3, \ldots, n)\}$.

Exercice 2 (Le groupe D_6)**.**

On considère les matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \rho := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Quel est l'ordre de σ et de ρ?

(2) Pouvait-on prévoir ce résultat avec le théorème de Lagrange?

(3) Décrire le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par σ et ρ.
(*Conseil* : Calculer $\sigma\rho$)
Ce groupe est le *groupe diédral* D_6. C'est le groupe des isométries de l'hexagone (régulier).

(4) Décrire un monomorphisme de groupes de D_6 dans $\mathbb{S}_6$. Peut-il être un isomorphisme?