

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 4**

**ANNEAUX ET IDÉAUX**

**Exercice 1** (Image d'un idéal).

Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

- (1) Si on suppose que  $f$  soit surjectif, montrer que l'image de tout idéal  $I$  de  $A$  par  $f$  est un idéal de  $B$ .

L'image  $f(I)$  de  $I$  par  $f$  est un sous-anneau de  $B$  (pourquoi?). Soient  $f(i) \in f(I)$  et  $b \in B$ . Comme  $f$  est surjective,  $b$  est égal à  $b = f(a)$  pour un  $a \in A$ . D'où,  $f(i).b = f(i).f(a) = f(i.a)$ . Comme  $I$  est un idéal de  $A$ , on a  $i.a \in I$  et  $f(i).b = f(i.a) \in f(I)$ . Donc  $f(I)$  est un idéal de  $B$ .

- (2) Donner un exemple de morphisme  $f : A \rightarrow B$  et d'idéal  $I$  de  $A$  tel que  $f(I)$  ne soit pas un idéal de  $B$ .

Considérons l'injection canonique  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Q}$ . C'est un morphisme d'anneaux (à justifier). L'image de  $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ , qui est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , est  $\mathbb{Z}$  qui n'est pas un idéal de  $\mathbb{Q}$  (à justifier).

**Exercice 2** (Lemme des restes chinois II, le retour).

Soit  $p$  et  $q$  deux nombres premiers entre eux. Dans la démonstration du lemme des restes chinois, nous avons décrit un isomorphisme d'anneaux

$$\varphi : \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Expliciter la réciproque de  $\varphi$ .

Indication : Aller revoir votre cours de l'an dernier.

Comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, par le théorème de Bezout, il existe une paire  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  telle que  $1 = up + vq$ . (Pour calculer deux tels nombres, on utilise la division euclidienne. Voir le cours de l'an dernier). A toute paires de classes  $[a]_p$  modulo  $p$  et  $[b]_q$  modulo  $q$ . On associe la classe  $[bup + avq]_{pq}$ . Cette définition

- 1) ne dépend pas des choix de représentants ( $a$  et  $b$ ) [à vérifier],
- 2) est bien un morphisme d'anneaux [à vérifier],
- 3) donne la réciproque voulue [à vérifier].