ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 7

ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS

Exercice (Nombres de Mersenne, nombres de Fermat)**.**

(1) Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers. Si $a^n - 1$ est un nombre premier, montrer que $a = 2$ et que n est premier. Les nombres premiers de cette forme sont appelés *nombres de Mersenne*.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $2^n + 1$ est premier, montrer que n est une puissance de 2. Les nombres de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$ sont appelés *nombres de Fermat*.

(3) Montrer que les nombres de Fermat $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont premiers entre eux deux à deux.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on va montrer que F_n et F_{n+k} sont premiers entre eux. On a

$$F_{n+k} - 1 = 2^{2^{n+k}} = 2^{2^n * 2^k} = \left(2^{2^n}\right)^{2^k} = (F_n - 1)^{2^k}.$$

D'où

$$F_{n+k} - 1 \equiv (F_n - 1)^{2^k} \equiv (-1)^{2^k}\ {}_{[F_n]} \equiv 1\ {}_{[F_n]},$$

ce qui implique que que F_n divise $F_{n+k} - 2$. On considère le pgcd p de F_n et F_{n+k}. Il divise donc $F_{n+k} - 2$. Comme il divise F_{n+k}, il divise 2. Mais finalement comme F_n est impair, on conclut que $p = 1$.

(4) En déduire une autre démonstration du fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice.

Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444}, écrit dans le système décimal, et soit B la somme des chiffres de A. Que vaut C, la somme des chiffres de B ?

Comme $10^i \equiv 1_{[9]}$, chaque nombre n est congru à la somme de ses chiffres (écrit dans le système décimal) modulo 9 :

$$n = \sum_{i=0}^{N} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{N} a_i\ {}_{[9]}.$$

Donc $C \equiv B \equiv A \equiv 4444^{4444}\ {}_{[9]}$. Comme $4444 \equiv 4+4+4+4\ {}_{[9]} \equiv -2\ {}_{[9]}$, on a $4444^3 \equiv (-2)^3\ {}_{[9]} \equiv 1\ {}_{[9]}$. Et comme $4444 = 3 * 1482 + 1$, on a $4444^{4444} = (4444^3)^{1481} * 4444^1 \equiv 1 * (-2)\ {}_{[9]} \equiv 7\ {}_{[9]}$. Soit finalement

$$C \equiv 7\ {}_{[9]}.$$

Or, $4444^{4444} \leq 10000^{5000} = 10^{20000}$, il admet donc au plus 20000 chiffres. D'où $A \leq 9 * 20000 = 180000$, il a donc au plus 6 chiffres. De même, $B \leq 6 * 9 = 54$ et finalement, $C \leq 5 + 9 = 14$. De la congruence précédente, on peut conclure que $\boxed{C = 7}$.