CORRIGE de l'EXAMEN FINAL mai 2009

Exercice 1 (Espaces vectoriels quotients).

On travaille dans $V = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées canoniques.

(1) Soit $W = \{(x,\, y,\, y);\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Quel est la nature géométrique de W ?

Le sous-espace W est un hyperplan (plan) de $\mathbb{R}^3$.

(2) À quoi correspondent graphiquement les éléments de V/W dans l'espace $\mathbb{R}^3$? Représentez graphiquement W, la classe de $(0,\, 0,\, 1)$ et la classe de $(1,\, 0,\, 0)$.

Les éléments de V/W sont les plans de $\mathbb{R}^3$ parallèles à W.

(3) On définit l'application $s : V \to V$ par la formule $s\big((x, y, z)\big) := (0, 0, z - y)$. Montrer que c'est une application linéaire.

On a

$$s\big(\lambda.(x, y, z) + \mu.(x', y', z')\big) := (0, 0, \lambda.z + \mu.z' - \lambda.y - \mu.y') = \lambda.(0, 0, z - y) + \mu.(0, 0, z' - y')$$

(4) Quelle est son image ?

Son image est la droite $X := \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.

(5) Montrer que s se factorise par une unique application linéaire $\bar{s} : V/W \to V$ et interpréter $\bar{s}$ graphiquement.

Comme le noyau de s est égal à W, $\ker s = W$, il existe une unique application $\bar{s} : V/W \to V$ qui factorise s, par théorème du cours.

L'application $\bar{s}$ associe à un plan parallèle à W son unique point d'intersection avec la droite X.

(6) Que vaut $\pi \circ \bar{s}$?

On a $\pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_{V/W}$.

(7) Interpréter graphiquement la composée $\bar{s} \circ \pi$.

L'application $\bar{s} \circ \pi : V \to V$ est la projection sur X parallèlement à W.

(8) Si on pose $X := (0,\, 0,\, 1).\mathbb{R}$, à quoi est isomorphe V en fonction de X et W ?

Comme X est un système de représentants de l'espace vectoriel quotient V/W qui forme un sous-groupe distingué de V, alors on a les isomorphismes suivants

$$V \cong X \times W \cong X \oplus W.$$

Exercice 2 (Irréductibilité de polynômes)**.**
Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on pose $P_b(X) = X^5 - 21X + b \in \mathbb{Z}[X]$.

(1) Le polynôme $P_{10}(X)$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Comme $P_{10}(2) = 0$, on sait que $X - 2$ divise $P_{10}(X)$, il n'est donc pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour tous les b de la forme 3.2^n avec $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer le critère d'Eisenstein avec le nombre premier 3 : 3 ne divise pas le coefficient dominant (1), 3 divise tous les autres coefficients et 3^2 ne divise pas 3.2^n.

(3) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Dans tous les cas précédents, le contenu du polynôme $P_b(X)$ est 1, donc tous les polynômes précédents sont irréductibles sur $\mathbb{Z}[X]$ par le théorème de Gauss.

(4) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour les b de la forme $n^5 - 21n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $P_b(n) = 0$, donc P_b n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. (Ces b sont bien en nombre infini).

(5) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Idem.

Exercice 3 (Extensions de corps)**.**

(1) Montrer que $\alpha := 2^{\frac{1}{5}} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Comme le polynôme $P(X) = X^5 - 2$ s'annule en α, le nombre α est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

(2) Donner son polynôme minimal.

En appliquant le critère d'Eisenstein avec $p = 2$ à P, on montre qu'il est irréductible donc que c'est le polynôme minimal.

(3) Est-ce que $\beta := 4^{\frac{1}{5}} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$?

Comme le polynôme $P(X) = X^5 - 4$ s'annule en β, le nombre β est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

(4) Quel est son degré algébrique ?

On a $\beta = \alpha^2$ et donc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\beta] \subset \mathbb{Q}[\alpha]$. Comme nous avons là des extensions finies, on peut appliquer le théorème des multiplicités des degrés :

$$\underbrace{[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]}_{5} = [\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\beta]] \times [\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}].$$

Donc le degré de β est 1 ou 5. Or il est facile de voir que $\beta \notin \mathbb{Q}$, donc $[\mathbb{Q}[\beta] : \mathbb{Q}] \neq 1$. Au final, le degré de β est 5.

(5) Quel est son polynôme minimal ?

Comme son degré est 5, $P(X) = X^5 - 4$ est son polynôme minimal (qui est donc irréductible).

(6) Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\beta]$.

De la question (4), on a $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}[\beta]] = 1$.

(7) En donner une base sur $\mathbb{Q}$.

L'ensemble $\{1, 2^{\frac{1}{5}}, 2^{\frac{2}{5}}, 2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{4}{5}}\}$ est une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$ sur $\mathbb{Q}$.