EXAMEN FINAL mai 2009

Il sera tenu compte dans le barème du soin et de la rédaction. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.

(1) Donner la définition d'un *élément transcendant* dans une extension de corps.

(2) Énoncer et démontrer le *théorème de la base téléscopique* des extensions de corps.

Exercice 1 (Espaces vectoriels quotients).
On travaille dans $V = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées canoniques.

(1) Soit $W = \{(x,\, y,\, y);\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Quel est la nature géométrique de W ?

(2) À quoi correspondent graphiquement les éléments de V/W dans l'espace $\mathbb{R}^3$? Représentez graphiquement W, la classe de $(0,\, 0,\, 1)$ et la classe de $(1,\, 0,\, 0)$.

(3) On définit l'application $s : V \to V$ par la formule $s\big((x, y, z)\big) := (0, 0, z - y)$. Montrer que c'est une application linéaire.

(4) Quelle est son image ?

(5) Montrer que s se factorise par une unique application linéaire $\bar{s} : V/W \to V$ et interpréter $\bar{s}$ graphiquement.

(6) Que vaut $\pi \circ \bar{s}$?

(7) Interpréter graphiquement la composée $\bar{s} \circ \pi$.

(8) Si on pose $X := (0,\, 0,\, 1).\mathbb{R}$, à quoi est isomorphe V en fonction de X et W ?

Exercice 2 (Irréductibilité de polynômes).
Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on pose $P_b(X) = X^5 - 21X + b \in \mathbb{Z}[X]$.

(1) Le polynôme $P_{10}(X)$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

(2) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(3) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

(4) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(5) Explicitez une infinité d'entiers b pour lesquels $P_b(X)$ est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3 (Extensions de corps).

(1) Montrer que $\alpha := 2^{\frac{1}{5}} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

(2) Donner son polynôme minimal.

(3) Est-ce que $\beta := 4^{\frac{1}{5}} \in \mathbb{R}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$?

(4) Quel est son degré algébrique ?

(5) Quel est son polynôme minimal ?

(6) Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\beta]$.

(7) En donner une base sur $\mathbb{Q}$.