Corrigé de l'EXAMEN PARTIEL mars 2009

Exercice (Le groupe $\mathbb{H}_8$).

On pose

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(1) Quel est l'ordre de ces éléments dans $GL_2(\mathbb{C})$?

L'ordre de I est 1. Comme $A^2 = B^2 = C^2 = -I$, l'ordre de A, B et C est 4.

(2) Que vaut AB ? Que vaut A^2 ? Que vaut $AB + BA$?

On a $AB = C$, $A^2 = -I$ et $AB = -BA$.

On admettra les relations suivantes

$$\begin{array}{lll} BC = A, & B^2 = -I, & BC = -CB, \\ CA = B, & C^2 = -I, & CA = -AC. \end{array}$$

On note $H :=< A, B, C >$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par $\{A, B, C\}$.

(3) Si on admet que le cardinal de H est fini, quelles valeurs peut-il prendre ?

Si le groupe H est fini, alors l'ordre de chacun de ses éléments divise son cardinal, par le (corollaire du) théorème de Lagrange. La question 1 donne que le cardinal de H est alors un multiple de 4.

(4) Démontrer que $H = \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$.

On appelle ce groupe le *groupe des quaternions* et on le note habituellement $\mathbb{H}_8$.

Posons $K = \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$ et montrons d'abord que K est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$. L'ensemble K n'est pas vide. Les relations précédentes montrent qu'il est stable par produit et par inverse (par exemple $A^{-1} = -A$).

Donc, $H \subset K$ par définition du sous-groupe engendŕe par $\{A, B, C\}$, qui est le plus petit sous-groupe pour l'inclusion de $GL_2(\mathbb{C})$ contenant $\{A, B, C\}$. Réciproquement, comme H contient A, il doit contenir $A^2 = -I$ puis $-A$, $-B$ et $-C$. Donc $K \subset H$. Au final, on a $H = \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$.

On remarque que le résultat est cohérent avec la question 3.

(5) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$.

Les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont

$\{I\}$,

$\{I, -I\} =< -I >$,

$\{I, -I, A, -A\} =< A >$,

$\{I, -I, B, -B\} =< B >$,

$\{I, -I, C, -C\} =< C >$,

$\{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$.

(6) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués.

Pour les deux sous-groupes triviaux, c'est évident. Les autres sous-groupes sont des sous-groupes cycliques engendrés par $-I$, A, B et C respectivement. Comme

$$XY^kX^{-1} = \underbrace{XYX^{-1}\,XYX^{-1}\,\ldots\,XYX^{-1}}_{\text{k fois}},$$

alors $XYX^{-1} \in < Y >$ implique $XY^kX^{-1} \in < Y >$. Donc, pour montrer qu'un sous-groupe cyclique est distingué, il suffit de montrer que les conjugués d'un générateur appartient au dit sous-groupe. C'est le cas pour $-I$ qui est dans le centre de $GL_2(\mathbb{C})$. C'est le cas pour A, grâce aux formules :

$$BA(-B) = -BAB = -BC = -A \qquad CA(-C) = -BC = -A.$$

On procéde de même pour B et C.

(7) Montrer que le groupe $\mathbb{H}_8$ n'est pas commutatif.

De la question 2, on a $AB = -BA$ donc $AB \neq BA$.

(8) Soit le sous-groupe $K = \{I, -I\}$ de $\mathbb{H}_8$. Décrire le groupe quotient $\mathbb{H}_8/K$.

Les classes à gauche modulo K sont $K = \{I, -I\}$, $A.K := \{A, -A\}$, $B.K := \{B, -B\}$ et $C.K := \{C, -C\}$. Le quotient $\mathbb{H}_8/K$ consiste à identifier dans $\mathbb{H}_8$ les éléments de signe opposé. Dans ce groupe, on a $\bar{A}^2 = \bar{B}^2 = \bar{C}^2 = \bar{I}$, $\bar{A}\bar{B} = \bar{C}$, $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$, etc ... Donc le groupe quotient $\mathbb{H}_8/K$ est abélien et il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour le démontrer, il y a deux méthodes.

On peut dire qu'il n'y a que deux groupes abéliens de cardinal 4 : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Ici, tous les éléments sont d'ordre 2 (sauf le neutre bien sur), donc il s'agit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On peut aussi construire à la main l'isomorphisme :

$$(0,0) \mapsto \bar{I}, \quad (1,0) \mapsto \bar{A}, \quad (0,1) \mapsto \bar{B}, \quad (1,1) \mapsto \bar{C}.$$

(9) Montrer que le groupe quotient $\mathbb{H}_8/K$ n'admet aucun système de représentants qui forme un sous-groupe de $\mathbb{H}_8$.

Les systèmes de représentants du quotient $\mathbb{H}_8/K$ sont tous de la forme $\{\pm I, \pm A, \pm B, \pm C\}$. Si on veut qu'un soit un sous-groupe, il faut choisir I à la place de $-I$. Dans ce cas, que l'on choisisse A ou $-A$, dans les deux cas $A^2 = (-A)^2 = -I$, d'où l'impossibilité de trouver un système de représentants qui forme un sous-groupe de $\mathbb{H}_8$.

(10) Déterminer le centre de $\mathbb{H}_8$.

Des relations dans le groupe $\mathbb{H}_8$, on a $Z(\mathbb{H}_8) = K = \{I, -I\}$.

(11) Montrer que son groupe dérivé de $\mathbb{H}_8$ est égal à $D(\mathbb{H}_8) = \{I, -I\}$.

La seule manière d'obtenir des commutateurs non triviaux est

$$[A, B] = AB(-A)(-B) = ABAB = C^2 = -I,$$

ou en utilisant $[B, C]$ ou $[C, A]$, qui donnent le même résultat. Donc, l'ensemble des commutateurs est $\{I, -I\}$. Comme c'est déjà un sous-groupe de $\mathbb{H}_8$, le sous-groupe qu'il engendre est lui-même, d'où $D(\mathbb{H}_8) = \{I, -I\}$.