ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE MATHÉMATIQUES L3
Université de Nice Sophia-Antipolis Année 2008-2009

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

GÉNÉRATEURS DE GROUPES AND CLASSES MODULO UN SOUS-GROUPE

Exercice 1 (Produit de groupes cycliques)**.**
Soient deux groupes cycliques C_1 et C_2 d'ordre respectivement p et q premiers entre eux. [On rappelle que le produit $C_1 \times C_2$ de deux groupes est défini par le produit suivant $(a_1, a_2).(b_1, b_2) := (a_1.b_1, a_2.b_2)$.]

(1) Montrer que le produit $C_1 \times C_2$ est encore un groupe cyclique et en donner un générateur.

(2) Sachant que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quel théorème venez-vous de redémontrer ?

Exercice 2 (Le groupe diédral D_6)**.**
On considère les matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \rho := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Interpréter géométriquement σ et ρ comme transformations du plan.

(2) Quel est l'ordre de σ et de ρ ?

(3) Pouvait-on prévoir ce résultat avec le théorème de Lagrange ?

(4) Montrer que $\sigma \circ \rho = \rho^5 \circ \sigma$.

(5) Décrire le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par σ et ρ.
Ce groupe est le *groupe diédral* D_6. C'est le groupe des isométries de l'hexagone régulier.

(6) Soit $H :=< \sigma >$ le sous-groupe de D_6 engendré par σ. Combien y a-t-il dans D_6 de classes à gauche modulo H ? Décrivez les.

(7) Appliquer le théorème de Cayley à D_6. Montrer que l'on peut affiner ce résultat ici en décrivant un monomorphisme de groupes de D_6 dans $\mathbb{S}_6$. Peut-il être un isomorphisme ?

(8) On considère le groupe diédral D_3 qui est le groupe des isométries d'un triangle équilatéral. Montrer que D_6 est isomorphe au produit direct $D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (Le groupe symétrique $\mathbb{S}_4$)**.**

(1) Quel est le cardinal de $\mathbb{S}_4$?

(2) Donner la liste de tous ses éléments.

(3) Quel est l'ordre du cycle (1234) ? Quel est le cardinal du groupe cyclique $H :=< (1234) >$ engendré par (1234) ?

(4) Combien de classes à gauche modulo H existe-t-il dans $\mathbb{S}_4$?

(5) Décrire $\mathbb{S}_4/H$. En donner des représentants.

Exercice 4 (Examen partiel, mars 2008)**.**
On considère les deux matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\alpha := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner l'ordre de α de β et de $\alpha\beta$.

(2) Supposons que le sous-groupe $\mathbb{B}_2 :=< \alpha, \beta >$ de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par α et β soit de cardinal fini, que pouvez-vous dire sur ce cardinal ?

(3) Donner une relation entre $\alpha\beta\alpha\beta$ et $\beta\alpha\beta\alpha$.

(4) Décrire le sous-groupe $\mathbb{B}_2$ engendré par α et β. Donner la liste des éléments qu'il contient sous la forme de mots en α et β.

(5) Donner la liste des sous-groupes de $\mathbb{B}_2$.

On considère l'action naturelle de $\mathbb{B}_2$ sur les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$: pour $M \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma \in \mathbb{B}_2 \subset GL_2(\mathbb{R})$, on définit $\gamma.M := \gamma(M)$, où γ est vu comme l'isomorphisme associé dans la base canonique.

(6) Pour tout vecteur non nul M de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, décrire son orbite pour l'action de $\mathbb{B}_2$. Combien contient-elle de points ?

Indication : Un dessin sera apprécié.

(7) Interpréter $\mathbb{B}_2$ géométriquement comme groupe de transformation du plan.

(8) On considère le sous-groupe $N := \{I, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta\}$. Montrer qu'il est distingué dans $\mathbb{B}_2$.

(9) Montrer que $\mathbb{B}_2/N$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{B}_2$, que l'on précisera.

(10) Est-ce-que $\mathbb{B}_2$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Exercice 5 (Générateurs de $GL_n(\mathbb{R})$)**.** On considère les trois familles de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ suivantes :

- *Transvections :* matrices M telles que tous les $M_{ij} = 0$ sauf $M_{ii} = 1$ et eventuellement pour un seul couple (i, j) avec $i \neq j$,
- *Dilatations :* matrices diagonales avec des coefficients non nuls sur la diagonale,
- *Permutations :* matrices associées aux permutations de $\mathbb{S}_n$, i.e. pour $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $M(\sigma)_{i\sigma(i)} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $M(\sigma)_{ij} = 0$ sinon.

(1) Montrer que les matrices de chacune de ces familles sont inversibles.

(2) Pour chacune de ces familles, décrire l'effet de la multiplication à gauche et à droite d'une matrice de cette famille sur une matrice quelconque.

(3) Montrer ces trois familles de matrices engendrent $GL_n(\mathbb{R})$.

(4) Soit H le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les transvections et les permutations. Décrire les classes de $GL_n(\mathbb{R})$ module H à gauche et à droite. Décrire un système de représentants.