CORRIGÉ DE FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

ACTION DE GROUPES

Exercice (Action par conjugaison)**.**
Soit $(G, *, e)$ un groupe fini.

(1) On définit l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,\, x) & \longmapsto & g.x := g * x * g^{-1}. \end{array}$$

Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.

Le neutre agit trivialement : $e.x = e * x * e^{-1} = e * x * e = x$.

Pour tout g, g', x dans G, on a

$$g.(g'.x) = g.(g' * x * {g'}^{-1}) = g * g' * x * {g'}^{-1} * g^{-1} = (g * g') * x * (g * g')^{-1} = (g * g').x$$

(2) Lorsque qu'un groupe G agit sur un ensemble X, on appelle *points fixes* les éléments de X qui sont invariants sous l'action de G ; ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g.x = x, \forall g \in G\}$. Décrire les points fixes de l'action par conjugaison d'un groupe G sur lui-même.

Un élément $x \in G$ est un point fixe si et seulement si $\forall g \in G\ g.x = x$, ce qui est équivalent à $g * x * g^{-1} = x \Leftrightarrow g * x = x * g$.

Les points fixes pour l'action par conjugaison d'un groupe sur lui-même sont donc les éléments qui commutent avec tous les autres, c'est-à-dire les éléments du centre de G

(3) Dans le cas $G = \mathbb{S}_4$, décrire les orbites et les stabilisateurs.

Les différentes orbites sont

- id
- (12), (13), (14), (23), (24), (34)
- (12)(34), (13)(24), (14)(23)
- (123), (132), (134), (143), (234), (243), (124), (142)
- (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432).

Les stabilisateurs correspondant sont

- $G_{\mathrm{id}} = \mathbb{S}_4$
- $G_{(12)} = \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\}$
- $G_{(12)(34)} = \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$
- $G_{(123)} = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$
- $G_{(1234)} = \{\mathrm{id}, (1234), (13)(24), (1432)\}$.

Vérification : à chaque fois, on a bien $|G| = |G.x| \times |G_x|$.

(4) Combien y a-t-il d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathbb{S}_{10}$ sur lui-même ?

Toute permutation de $\mathbb{S}_n$ s'écrit de manière unique comme produit de cycles à support disjoint. Ici on compte aussi les "cycles" de longueur 1, et on note la liste des tailles des cycles. Par exemple, à la permutation $(27)(134)(8910) = (5)(6)(27)(134)(8910)$, on associe les 5-uplet $(1, 1, 2, 3, 3)$. On ordonne toujours ce k-uplet pas ordre croissant (les cycles à support disjoint commutent). La somme des éléments de ce k-uplet vaut n (10 ici). Un tel k-uplet est appelé une *partition du nombre* n. On a une bijection entre les partitons de 10 et les orbites de $\mathbb{S}_{10}$ sous l'action de lui-même par conjugaison (cf. l'exercice précédent). Et on a 42 partitions du nombre 10.

(5) Appliquer l'équation aux classes à cette action pour montrer qu'il existe une famille finie $\{H_i\}_{i\in I}$ de sous-groupes stricts de G (i.e. $\neq \{1_G\}$ et $\neq G$) telle que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i\in I} \frac{|G|}{|H_i|}.$$

Soit Θ un système de représentants des orbites. Dans la démonstration de l'équation aux classes, nous avons vu que $|G| = \sum_{\theta\in\Theta} \frac{|G|}{|G_\theta|}$. Les orbites se scindent en deux : celle qui n'ont qu'un seul élément, qui est alors un point fixe, et les autres. Ceci induit une partition de $\Theta = Z(G) \sqcup \Theta'$. L'équation aux classes devient alors

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\theta\in\Theta'} \frac{|G|}{|G_\theta|},$$

où Θ' est un ensemble d'indices fini et les stabilisateurs G_θ, avec $\theta \in \Theta'$ sont des sous-groupes non triviaux de G. (Comme les orbites correspondantes ne sont pas réduites à un seul élément, le stabilisateur est différent de G. Et comme cette action n'est pas transitive, il y a au moins deux orbites et aucun stabilisateur ne peut être égal à $\{e\}$.)

Supposons maintenant que le cardinal de G soit égal à p^r avec p un nombre premier. On dit que G est un *p-groupe*.

(6) Montrer que le centre de G n'est pas réduit au neutre. Pour cela montrer qu'il a au moins p éléments.

On applique le résultat de la question précédente. Pour tout $\theta \in \Theta'$, on a $\frac{|G|}{|G_\theta|} = p^s$ avec $1 \leq s < r$. Donc p divise $\frac{|G|}{|G_\theta|} = p^s$ pour tout $\theta \in \Theta'$. De même, p divise $|G| = p^r$. Le résultat de la question précédente montre alors que p divise $|Z(G)|$. Comme $e \in Z(G)$, le cardinal du centre $Z(G)$ est supérieur ou égal à 1, il vaut donc au moins p.

(7) Décrire G lorsque $r = 1$. Montrer que G est abélien lorsque $r = 2$. Déterminer tous les groupes abéliens d'ordre p^2.

Lorsque $|G| = p$, tout élément de G, qui n'est pas le neutre, engendre G et est d'ordre p. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. C'est un groupe abélien ($Z(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Lorsque $|G| = p^2$, il y a deux cas de figure : $|Z(G)| = p^2$ ou $|Z(G)| = p$. Dans le premier cas, G est abélien, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, par la classification des groupes abéliens finis.

Montrons que l'autre cas est en fait impossible. On a alors $|G/Z(G)| = p$, d'où le quotient $G/Z(G)$ est isomorphe un groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; il est donc cyclique. Soit $x \in G$ tel que $\overline{x}$ engendre $G/Z(G)$. Un système de représentants de ce quotient est formé de $\{e, x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}$. Montrons que x est dans le centre de G. Soit $y \in G$, il s'écrit $y = x^k * z$ avec $0 \leq k \leq p-1$ et $z \in Z(G)$. Donc on a $x * y = y * x$. Comme $\overline{x}$ engendre $G/Z(G)$, il est différent de $\overline{e}$, c'est-à-dire qu'il n'appartient pas à $Z(G)$; d'où la contradiction (le centre aurait alors strictement plus de p éléments).

Exercice (Les bagues de Suleima)**.**
Le fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve d'amour, de lui offrir chaque mois une bague différente. Les bagues qu'il confectionne sont en or et incrustées d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a six pierres précieuses régulièrement réparties et qui se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte.

Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?

Indication : On pourra faire opérer le groupe diédral D_6 sur l'ensemble des hexagones réguliers dont les sommets sont indicés par $\{E, S, R\}$ et appliquer le résultat de l'exercice précédent.

Comme expliqué en cours, on considère l'ensemble X formé par toutes les manières d'indicer les six sommets d'un hexagone par les lettres $\{E, S, R\}$. On fait agir le groupe diédral D_6 dessus. Les orbites sont en bijection avec l'ensemble des bagues possibles. On applique ensuite la formule de Burnside-Frobenius pour compter le nombre d'orbites, qui est égal à $\frac{1}{|D_6|}\sum_{g \in D_6} |X^g| =$

$$\frac{1}{12}\left(\underbrace{3^6}_{X^{\mathrm{id}}} + \underbrace{3}_{X^{\rho}} + \underbrace{3^2}_{X^{\rho^2}} + \underbrace{3^3}_{X^{\rho^3}} + \underbrace{3^2}_{X^{\rho^4}} + \underbrace{3}_{X^{\rho^5}} + \underbrace{3^4}_{X^{\sigma}} + \underbrace{3^4}_{X^{\rho\sigma}} + \underbrace{3^4}_{X^{\rho^2\sigma}} + \underbrace{3^3}_{X^{\rho^3\sigma}} + \underbrace{3^3}_{X^{\rho^4\sigma}} + \underbrace{3^3}_{X^{\rho^5\sigma}}\right) = 92.$$

Leur amour ne durera que 92 mois, soit 7 ans et 8 mois ...