FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

ACTION DE GROUPES

Exercice 1 (Espace projectif)**.**
On considère l'action suivante du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \\ \big(\lambda; (x_1, \ldots, x_n)\big) & \mapsto & (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n) \end{array}$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une action de groupe.

(2) Décrire l'ensemble quotient, c'est-à-dire l'ensemble des orbites, lorsque n vaut 1, 2 ou 3.

(3) Dans chacun des cas précédents, dire si l'action est transitive, simplement transitive, fidèle.

(4) Pour $n = 1, 2$ ou 3, donner un système de représentants de l'ensemble quotient.

Exercice 2 (Équation aux classes)**.**
Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Soit Θ un système de représentants des orbites. Montrer que

$$|X| = \sum_{x \in \Theta} |G.x| = \sum_{x \in \Theta} \frac{|G|}{|G_x|} .$$

Exercice 3 (Action par conjugaison)**.**
Soit $(G, *, e)$ un groupe fini.

(1) On définit l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,\, x) & \longmapsto & g.x := g * x * g^{-1}. \end{array}$$

Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.

(2) Lorsque qu'un groupe G agit sur un ensemble X, on appelle *points fixes* les éléments de X qui sont invariants sous l'action de G ; ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g.x = x, \forall g \in G\}$. Décrire les points fixes de l'action par conjugaison d'un groupe G sur lui-même.

(3) Dans le cas $G = \mathbb{S}_4$, décrire les orbites et les stabilisateurs.

(4) Combien y a-t-il d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathbb{S}_{10}$ sur lui-même ?

(5) Appliquer l'équation aux classes à cette action pour montrer qu'il existe une famille finie $\{H_i\}_{i \in I}$ de sous-groupes stricts de G (i.e. $\neq \{1_G\}$ et $\neq G$) telle que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i \in I} \frac{|G|}{|H_i|}.$$

Supposons maintenant que le cardinal de G soit égal à p^r avec p un nombre premier. On dit que G est un *p-groupe.*

(6) Montrer que le centre de G n'est pas réduit au neutre. Pour cela montrer qu'il a au moins p éléments.

(7) Décrire G lorsque $r = 1$. Montrer que G est abélien lorsque $r = 2$. Déterminer tous les groupes abéliens d'ordre p^2.

Exercice 4 (Nombre d'orbites : Formule de Burnside-Frobenius)**.**
Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que le nombre d'orbites est égal à

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

où $X^g := \{x \in X\,;\, g.x = x\}$ est l'ensemble des éléments de X invariants sous l'action de g.
Indication : On pourra calculer le cardinal de l'ensemble $\{(g, x) \in G \times X\,;\, g.x = x\}$ de deux manières différentes.

Exercice 5 (Les bagues de Suleima)**.**
Le fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve d'amour, de lui offrir chaque mois une bague différente. Les bagues qu'il confectionne sont en or et incrustées d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a six pierres précieuses régulièrement réparties et qui se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte.

Pendant combien de temps Suleima pourra-t-elle être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?

Indication : On pourra faire opérer le groupe diédral D_6 sur l'ensemble des hexagones réguliers dont les sommets sont indicés par $\{E, S, R\}$ et appliquer le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 6 (Coloriage du cube)**.**
Combien y a-t-il de manières différentes de colorier des sommets d'un cube avec 3 couleurs ?