FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 7

ESPACES VECTORIELS QUOTIENTS ET ANNEAUX QUOTIENTS

1. Anneaux

Définition 1 (Anneau)**.** Un *anneau* $(A, +, .)$ est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+, . : G \times G \to G$ telles que
• $(A, +)$ est un groupe abélien,
• la loi . est associative,
• la loi . est distributive par rapport à la loi $+$, i.e. pour tout $a, b, c \in A$ on a $a.(b + c) = a.b + a.c$ et $(a + b).c = a.c + b.c$.
Si la loi . admet un élément neutre, on parle d'anneau *unitaire*. Si la loi . est commutative, on parle d'anneau *commutatif*. Un élément de A est dit *inversible* s'il l'est pour la loi . de A.

Le neutre de la loi $+$ est souvent noté 0 et le neutre de la loi . est souvent noté 1.

Définition 2 (Anneau intégre)**.** Un anneau est dit *intégre* s'il n'a pas de diviseur de zéro, i.e. si $a.b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Définition 3 (Sous-anneau)**.** Un sous-ensemble $B \subset A$ d'un anneau A est un *sous-anneau* de A si les restrictions de $+$ et de . à B en font un anneau.

Définition 4 (Idéal)**.** Un sous-ensemble $I \subset A$ d'un anneau A est un *idéal* de A si
• $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$,
• pour tout $x \in I$ et $a \in A$, on a $a.x \in I$ et $x.a \in I$.

Définition 5 (Morphisme d'anneaux)**.** Soient $(A, +, .)$ et $(A', +', .')$ deux anneaux. Un *morphisme d'anneaux* est une application $\varphi : A \to A'$ telle que $\varphi(x+y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$ et $\varphi(x.y) = \varphi(x) .' \varphi(y)$ pour tout $x, y \in A$.
Le *noyau* d'un morphisme d'anneaux φ est égal à

$$Ker\,\varphi := \varphi^{-1}(\{0'\}) = \{x \in A; \varphi(x) = 0'\}.$$

2. Corps

Définition 6 (Corps)**.** Un *corps* est un anneau commutatif $(\mathbb{K}, +, .)$ [en France] tel que $(\mathbb{K} - \{0\}, .)$ soit un groupe, c'est-à-dire que tout élément non nul est inversible pour la loi ".".

3. Espaces vectoriels

On rappelle qu'un *espace vectoriel* sur un corps $\mathbb{K}$ est un groupe abélien $(V, +, 0)$ muni d'une loi de composition externe (*multiplication scalaire*) $\mathbb{K} \times V \to V,\ (\lambda,\, u) \mapsto \lambda.\mu$ telle que

$$\begin{aligned} 1.u &= u \\ (\lambda \times \mu).u &= \lambda.(\mu.u) \\ (\lambda + \mu).u &= \lambda.u + \mu.u \\ \lambda.(u + v) &= \lambda.u + \lambda.v \end{aligned}$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in V$.

Exercice 1 (Espaces vectoriels quotients)**.**
Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et soit W un sous-espace de V. Donc W est en particulier un sous-groupe dsitingué de $(V, +,\, 0)$.

(1) On considère le groupe abélien quotient V/W. Montrer qu'il existe une unique structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur V/W telle que la projection $\pi : V \twoheadrightarrow V/W$ soit une application linéaire.

(2) Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $W = \{(x,\, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$, à quoi correspondent graphiquement les élements de V/W dans le plan affine.

(3) Avec les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, on définit l'application $s : V \to V$ par la formule $s\big((x, y)\big) := (y, y)$. Montrer que s définie une application linéaire $\bar{s} : V/W \to V$ et interpréter la graphiquement.

(4) Que vaut $\pi \circ \bar{s}$? Interpréter graphiquement la composée $\bar{s} \circ \pi$.

(5) Si on pose $X := (1, 1).\mathbb{R}$, à quoi est isomorphe V (en fonction de X et W) ?

(6) Reprenez les questions précédentes avec V et W quelconque.

Exercice 2 (Anneaux quotients)**.**
Soit A un anneau et soit I un sous-groupe du groupe abélien $(A, +, 0)$. Donc I est en particulier un sous-groupe distingué de $(A, +,\, 0)$.

(1) On considère le groupe abélien quotient A/I. Montrer qu'il existe une unique structure de d'anneau sur A/I telle que la projection $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ soit un morphisme d'anneaux.

(2) Quels sont les seuls idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$?

(3) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le groupe abélien quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est aussi un anneau tel que la projection canonique $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un morphisme d'anneaux. Qu'est-ce que cela signifie au niveau des calculs faits dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(4) Que vaut $17 * (31 + 111)$ modulo 9 ?

Exercice 3 (Idéaux premiers, idéaux maximaux)**.**
On se place dans un anneau commutatif unitaire A.
Un idéal I est dit *premier* si pour tout $x, y \in A$ tels que $x.y \in I$, alors on a $x \in I$ ou $y \in I$.

(1) Montrer que I est premier si et seulement si l'anneau quotient A/I est intègre.

(2) Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$.

Un idéal I est dit *maximal* s'il l'est pour l'inclusion, c'est-à-dire si les seuls idéaux contenant I sont I et A.

(3) Montrer que I est un idéal maximal si et seulement si l'anneau A/I est un corps.

(4) Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.

(5) Montrer que tout idéal maximal est premier.

(6) Réciproquement, si A est principal, montrer qu'un idéal premier $I \neq \{0\}$ est maximal.

(7) L'anneau $\mathbb{Z}$ est-il principal ?

(8) L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est-il principal ?