Algèbre et Arithmétique — Mathématiques L3
Université de Nice Sophia-Antipolis — Année 2008-2009

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 9

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

Exercice 1 (Corps algébriquement clos).
Soit K un corps. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) Tout polynôme $P \in K[X]$, de degré supérieur à 1, a au moins une racine dans K.

(2) Tout polynôme $P \in K[X]$, de degré supérieur à 1, est un produit de polynômes de degré 1.

(3) Les seuls polynômes irréductibles sont les $X - a$, avec $a \in K$.

(4) Si $K \subset L$ est une extension algébrique, alors $K = L$.

Montrer que $A := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ algébrique sur } \mathbb{Q}\}$ est algébriquement clos.

Exercice 2 (Extensions intermédiaires).
Soit $K \subset M$ une extension finie de degré $[M : K] = p$ premier.
Déterminer toutes les extensions intermédiaires L, c'est-à-dire $K \subset L \subset M$.

Exercice 3 (Extensions algébriques).
Soient $K \subset L \subset M$ des extensions de corps.
Montrer que M est algébrique sur K si et seulement si M est algébrique sur L et L est algébrique sur K.

Exercice 4 (Quotients d'anneau de polynôme).
On considère le polynôme $P(X) := X^3 + 2X + 1$.

(1) Montrer que P n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(3) Dans le corps $\mathbb{Q}[X]/(P)$, que vaut le produit $\overline{X^4 + 2X + 3}.\overline{X^5 + X^3 + 1}$?

(4) Dans le corps $\mathbb{Q}[X]/(P)$, calculer l'inverse de $\overline{X^2 + 1}$.

Exercice 5 (Famille libre).
Montrer que $\{1, 5^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{2}{3}}\}$ forme une famille libre sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6 (Extensions quadratiques de Q).
Soit K une extension de degré 2 sur $\mathbb{Q}$.
Montrer que $K \cong \mathbb{Q}[\sqrt{a}\,]$ où a est un entier sans facteur carré, i.e. tel qu'il n'existe pas de nombre premier p tel que $p^2 | a$.

Exercice 7 (Extensions de degré impair).
Soit $K \subset L$ une extension de corps et soit $\alpha \in L$ algébrique de degré impair.
Montrer que $K[\alpha] \cong K[\alpha^2]$.