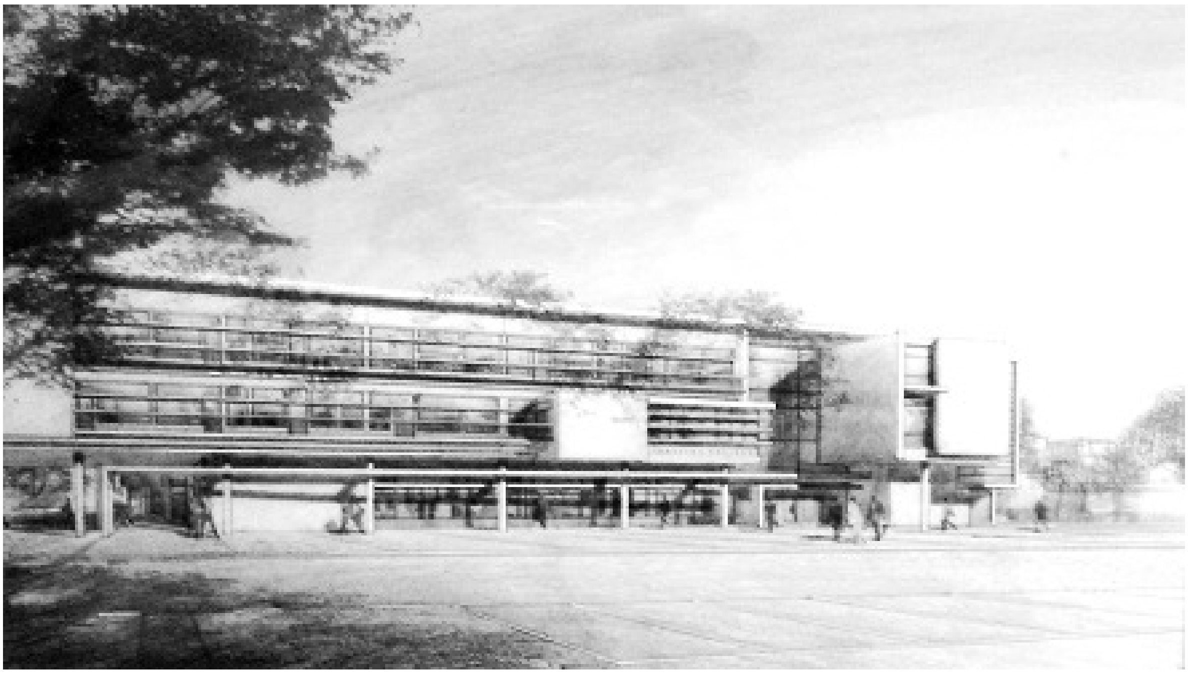
Université Paris 13
Institut Galilée

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES A

Licence 1re année
Premier semestre



Département de Mathématiques

Table des matières

Chapitre 1

Nombres Complexes

Le but de ce premier chapitre est d'introduire une nouvelle famille de ≪ nombres ≫ , les nombres *complexes*, qui généralisent les nombres réels. La principale motivation vient de la résolution des équations polynomiales.

1.1 Les nombres réels ne suffisent pas

Rappelons qu'il existe plusieurs familles de nombres chacune étant une généralisation de la précédente : les entiers naturels $\mathbb{N}$, les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et les nombres réels $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \ .$$

1.1.1 Les équations du second degré à coefficients réels

Dans de nombreux problèmes, on rencontre des équations du type :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ . \tag{$\mathcal{E}$}$$

où a, b, c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$, et où x est l'inconnue. Pour résoudre une telle équation, dite du *second degré à une inconnue*, on commence par la réduire à sa forme dite *canonique* (1.1) :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ =& a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

et on reconnaît le début du développement de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

d'où

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]} \ . \tag{1.1}$$

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée le *discriminant* et elle notée traditionnellement Δ. On distingue alors trois cas de figure.

- $\diamond$ <u>PREMIER CAS</u>. Si $\Delta > 0$, on peut écrire

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

et l'équation $(\mathcal{E})$ devient :

$$a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \ . \tag{1.2}$$

Il y a alors 2 solutions distinctes

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \ .$$

Dans ce cas, on peut factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$ sous le forme suivante

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \ .$$

Ce qui permet de trouver le signe de la quantité $ax^2 + bx + c$ en fonction de celui de x. Si on appelle r_1 la plus petite des deux racines x_1, x_2 et r_2 la plus grande, soit $r_2 > r_1$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est donné par le tableau suivant.

x		r_1		r_2	
$ax^2 + bx + c$	$\operatorname{sgn} a$	0	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$

- $\diamond$ <u>DEUXIÈME CAS</u>. Si $\Delta = 0$, l'équation $(\mathcal{E})$ devient

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \ .$$

Elle admet alors une seule solution dite « double»

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

et on a la factorisation :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2} \ .$$

Dans ce cas, l'expression $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours du signe de a.

- $\diamond$ <u>TROISIÈME CAS</u>. Si $\Delta < 0$, on a :

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif car } \Delta<0} \ .$$

On en déduit que l'équation $(\mathcal{E})$ n'a pas de racine réelle et que l'expression $ax^2 + bx + c$ ne peut pas se factoriser grâce aux nombres réels.

Exemple.

1. *Résoudre* $2x^2 - 8x + 6 = 0$. *Peut-on factoriser* $2x^2 - 8x + 6$ *?*

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 = 4^2 > 0$.
   Les solutions sont donc

   $$\boxed{x_1 = \frac{-(-8) - 4}{2 \times 2} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-(-8) + 4}{2 \times 2} = 3}\ .$$

   On en déduit :

   $$\boxed{2x^2 - 8x + 6 = 2(x-1)(x-3)}\ .$$

2. *Résoudre* $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Peut-on factoriser sur $\mathbb{R}$ l'expression $3x^2 - 12x + 12$?

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$.

   Elle admet une seule solution $\boxed{x_0 = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2}$ et on a :

   $$\boxed{3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2}\ .$$

3. *Résoudre* $2x^2 + 8x + 9 = 0$. Peut-on factoriser sur $\mathbb{R}$ l'expression $2x^2 + 8x + 9$?

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 9 = -8 < 0$.
   Il n'y a donc pas de solution réelle et l'expression $2x^2 + 8x + 9$ ne peut pas se factoriser sur les nombres réels.

Exercice. Résoudre les équations suivantes :

$$6x^2 - x - 1 = 0, \qquad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0, \qquad \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Peut-on factoriser ces expressions sur les nombres réels ?

1.1.2 Un peu d'histoire

Nous venons de voir que toutes les équations de degré 2 n'admettent pas nécessairement de racine réelle. La plus simple d'entre elles est l'équation $x^2 = -1$, soit

$$x^2 + 1 = 0\ . \tag{1.3}$$

Comme cette dernière n'admet pas de solution dans les nombres réels, les mathématiciens ont introduit un nombre dit *imaginaire* noté i tel que $i^2 = -1$. Avec celui-ci, ils ont construit les *nombres complexes.*

L'introduction de ces nouveaux nombres remonte au XVI$^{\text{e}}$ siècle. Les algébristes italiens de l'université de Bologne (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, ...) ont découvert les formules permettant de résoudre les équations polynomiales du troisième degré, comme par exemple

$$x^3 - 7x + 6 = 0\ . \tag{1.4}$$

Ils ont constaté un fait qui leur a paru incompréhensible. Chaque fois qu'une équation de ce type possède trois solutions réelles, comme 1, 2 et -3 pour l'équation précédente, les formules qui leur permettaient de calculer ces solutions faisaient intervenir des racines carrées de nombres négatifs... Ils ont alors considéré ces racines carrées comme des ≪ nouveaux nombres ≫ qu'ils ont appelés *nombres impossibles.* Néanmoins l'introduction rigoureuse de ces nouveaux nombres ne s'est pas faite sans mal.

En 1637, Descartes dans sa Géométrie [1], propose d'accepter comme solution d'une équation non seulement les nombres négatifs, mais aussi ceux qui pourraient comporter une « racine carrée d'un nombre négatif » . Il justifie ceci par un énoncé qui ne sera vraiment démontré qu'au XIX^e^ siècle et qui deviendra le théorème fondamental de l'algèbre :

> *Une équation polynomiale de degré n admet n solutions comptées avec multiplicité, si on accepte les négatives et les racines carrées de nombre négatif.*

La construction rigoureuse des nombres complexes n'a été achevée qu'à la fin du XVIII^e^ siècle. La notation définitive est due à Euler. Dans « Eléments d'algèbre », il écrit en 1774 en s'inspirant des régles de calcul pour les racines carrées des nombres positifs :

« *Maintenant comme $-a$ signifie autant que $+a$ multiplié par -1, et que la racine carrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$, est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$.*
Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raison donc, $\sqrt{-4}$ est autant que $\sqrt{4}$ multiplié par $\sqrt{-1}$ et autant que $2\sqrt{-1}$, à cause de $\sqrt{4}$ égale à 2. Par la même raison $\sqrt{-9}$ se réduit à $\sqrt{9}\sqrt{-1}$, ou $3\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-16}$ signifie $4\sqrt{-1}$.
De plus comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$. »

Exercice.

1. Comment écrit-on aujourd'hui des expressions comme « signifie autant que » ou « est autant que » utilisées par Euler ?
2. Quelles sont les différentes règles du calcul algébrique évoquées par Euler ?
   Indiquer les égalités correspondant aux différentes phrases du texte.
3. D'après la définition, à quoi est égal $(\sqrt{-1})^2$?
   En appliquant les règles du calcul algébrique calculez : $\sqrt{-1}\ .\ \sqrt{-1}$.
   Ces deux résultats sont-ils compatibles ?
4. Euler écrit aussi : $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{6}$! Or, suivant la démarche d'Euler, on va écrire
   $$\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{2}.\sqrt{3}.(\sqrt{-1})^2 = \cdots$$
   Ces deux égalités sont-elles compatibles ?

Il est donc difficile d'utiliser la notation $\sqrt{-a}$ pour un réel $a > 0$, et de continuer à utiliser les règles de calcul connues pour les nombres positifs. Euler va lui-même s'apercevoir de ces contradictions. Aussi décidera-t-il de noter par i (début d'« imaginaire » ou « impossible») la quantité qu'il notait $\sqrt{-1}$.

On peut tout de suite noter la règle **très importante** :

> **La notation « racine carrée » $\sqrt{\ }$, ne s'utilise qu'avec des nombres réels positifs. Elle n'a aucun sens pour les autres nombres.**

1. d'après « Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes » IREM, éd. Ellipses p. 157.

1.2 Forme cartésienne d'un nombre complexe

1.2.1 Définitions

Nous avons vu qu'il a été nécessaire d'introduire des nombres ayant un carré négatif. Pour ce faire, les mathématiciens ont introduit le nombre *imaginaire* i vérifiant $i^2 = -1$. On considère alors l'ensemble des « expressions » de la forme

$$\boxed{z = x + yi}$$

avec x et y réels, comme par exemple $3 - 2i$ ou $\frac{1}{2} - \sqrt{2}i$.

Définition (Nombre complexe). L'ensemble des *nombres complexes* est l'ensemble des expressions de la forme

$$z = x + yi, \quad \text{où} \quad x, y \in \mathbb{R} .$$

Cette forme est appelée *forme cartésienne* (ou *forme algébrique*). On note l'ensemble des nombres complexes par la lettre $\mathbb{C}$.

Définition (Parties réeles et imaginaires, conjugué, module).

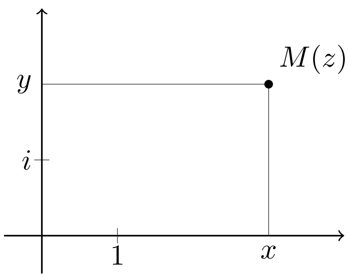
- ◇ Le nombre réel x est appelé la *partie réelle* de z. On le note $\boxed{\operatorname{Re} z = x}$.
- ◇ Le nombre réel y est appelé la *partie imaginaire* de z. On le note $\boxed{\operatorname{Im} z = y}$.
- ◇ Le nombre complexe $x - yi$ est appelé le *complexe conjugué* de z. On le note $\boxed{\bar{z} = x - yi}$.
- ◇ Le nombre réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le *module* de z. On le note $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

NOTATION. On écrit 0 pour $0i$, on écrit i pour $1i$ et $-i$ pour $-1i$. Ainsi on a par exemple $2 + 0i = 2$ et $-3 + 1i = -3 + i$ et $\sqrt{2} - 1i = \sqrt{2} - i$ ...

TERMINOLOGIE. Un nombre complexe $z = x+yi$ est dit *réel* si $y = \operatorname{Im} z = 0$, on note alors simplement $z = x$. Par conséquent, l'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. De la même manière, un nombre complexe z est dit *imaginaire pur* si $x = \operatorname{Re} z = 0$ on note alors $z = yi$. Le nombre complexe nul $0 = 0 + 0i$ est le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.

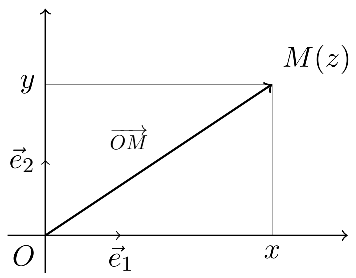
1.2.2 Représentation dans le plan

On travaille dans le plan que l'on munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Il existe une *correspondance* entre le nombre complexe z de forme cartésienne $x + i\,y$ et le point M de coordonnées (x, y).



On dit alors que le point M est *l'image ponctuelle* de z et que le nombre complexe z est *l'affixe* de M.

De la même manière, il existe une correspondance entre le nombre complexe z de forme cartésienne $x + i\,y$ et le *vecteur* $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.



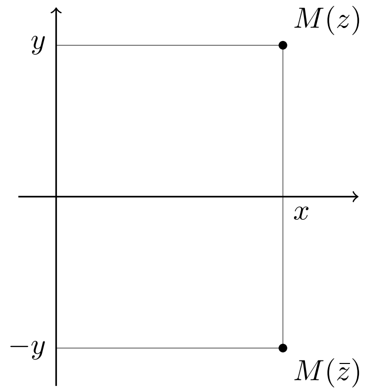
On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est *l'image vectorielle* de z et que le nombre complexe z est *l'affixe* du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés.

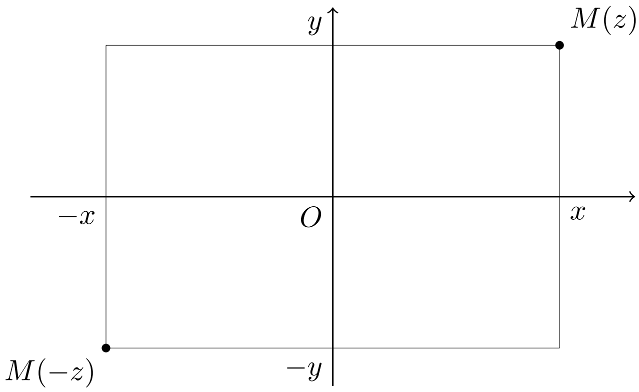
- ◇ Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs images sont confondues, c'est-à-dire s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$x + yi = x' + y'i \iff x = x' \text{ et } y = y' \ .$$

- ◇ Le complexe conjugué $\overline{z} = x - yi$ a pour image ponctuelle le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses Ox.



- ◇ Le complexe *opposé* $-z = -x - yi$ a pour image ponctuelle le symétrique de l'image de z par rapport l'origine O.



On en déduit les équivalences suivantes

$$\begin{array}{rcl} z \text{ est réel} & \Longleftrightarrow & \overline{z} = z \\ z \text{ est imaginaire pur} & \Longleftrightarrow & \overline{z} = -z \ . \end{array}$$

- ◇ La distance OM est égale au module de z. Ainsi, le cercle de rayon r et de centre O est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'équation $|\, z \,| = r$.

1.3 Opérations

1.3.1 Somme et produit

Définition (Somme et produit). L'addition et la multiplication de deux nombres complexes sont définies exactement de la même façon que pour les fonctions polynômes, le nombre i jouant le rôle de la variable. Il faut seulement respecter le fait que $i^2 = -1$.

Exemple. Soit $f(x) = 3 + 2x$ et $g(x) = 5 - 4x$. On a en développant :

$$\begin{array}{lclcl} f(x) + g(x) & = & (3 + 2x) + (5 - 4x) & = & 3 + 5 + 2x - 4x = 8 - 2x \ , \\ f(x)g(x) & = & (3 + 2x)(5 - 4x) & = & 15 - 12x + 10x - 8x^2 = 15 - 2x - 8x^2 \ . \end{array}$$

De même, pour les deux nombres complexes $3 + 2i$ et $5 - 4i$, on a :

$$(3 + 2i) + (5 - 4i) = 3 + 5 + 2i - 4i = 8 - 2i \ ,$$
$$(3 + 2i)(5 - 4i) = 15 - 12i + 10i - 8i^2 = 15 - 2i - 8(-1) = 23 - 2i \ .$$

La formule générale définissant la somme et le produit de deux nombres complexes est

$$\boxed{\begin{array}{l} (x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i \ , \\ (x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \ . \end{array}}$$

Propriétés. Toutes les propriétés de l'addition et de la mutiplication des nombres réels restent vraies pour les nombres complexes. Ainsi, il est facile de vérifier que [2] :

- ◇ $z + 0 = 0 + z = z$, $1z = z1 = z$ et $0z = z0 = 0$.
- ◇ $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.

2. à faire au moins une fois !

- ◇ $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ et $z(z'z'') = (zz')z''$.
- ◇ $z(z' + z'') = zz' + zz''$.
- ◇ $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Exercice. Démontrer la dernière propriété : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$. Énoncer la propriété « contraposée » .

Remarque. Comme la multiplication des nombres réels, la multiplication des nombres complexes est commutative, c'est-à-dire $zz' = z'z$. En particulier, on a $yi = iy$ ce qui donne $x + yi = x + iy$. Ceci qui explique pourquoi de nombreux cours définissent les complexes avec la notation $x + iy$. Désormais, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre écriture.

Définition (Opposé, différence de nombres complexes).
Pour tout nombre complexe $z = x + yi \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $-1z = -x - yi$ est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$; ce nombre complexe est *l'opposé* de z et on le note simplement par $-z$.
La *différence* $z - z'$ de deux nombres complexes, est définie par $z - z' = z + (-z')$.

1.3.2 Les coefficients binomiaux et la formule du binôme de Newton

On prend le temps ici de rappeler la définition des coefficients binomiaux et leur utilité dans la formule du binôme de Newton. Cette dernière, vraie au niveau des nombres réels, reste valable au niveau des nombres complexes.

Définition (Coefficients binomiaux). Pour tout entier n et tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n élélements. Il vaut explicitement

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}\ , \tag{1.5}$$

avec $k! = 1 \times 2 \times \ldots \times (k-1) \times k$ et $0! = 1$. Par convention, pour tout entier n et tout entier $k < 0$ ou $k > n$, ils sont nuls.

Remarque. Par exemple, on a $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$. Les coefficients binomiaux sont aussi notés C_n^k.

Vous pouvez avoir la *fausse* impression que comme on a une formule explicite, on va pouvoir calculer les coefficients binomiaux avec ... Il n'en est rien ! La raison est simple : le calcul de $n!$ dépasse très rapidement les capacités des ordinateurs. On va donc ruser et utiliser la propriété suivante.

Propriétés. Les coefficients binomiaux vérifient la formule de récurrence [3]

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}\ . \tag{1.6}$$

3. Nous aurions aussi pu les définir comme cela.

On peut donc calculer les coefficients binomiaux à l'aide du *triangle de Pascal*[4] : on met des 1 sur le bord du triangle, et chaque élément est la somme des deux éléments situés au-dessus de lui.

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & n=6
\end{array}$$

Ainsi le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le k-ième élément de la n-ième ligne (les lignes et les colonnes sont comptées à partir de 0). Par exemple, $\binom{6}{2} = 15$.

Exercice. Montrer qu'à partir de la définition (1.5), les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ vérifient bien la relation (1.6).

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton). *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\boxed{(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}}\ .$$

Démonstration. — Effectuons une démonstration par récurrence : soit P_n la propriété

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}.$$

Initialisation : la propriété P_1 est trivialement vraie : $z + z' = z + z'$.
Hérédité : supposons que la propriété P_n soit vraie pour une valeur $n \in \mathbb{N}$, alors on écrit

$$\begin{aligned}
(z+z')^{n+1} &= (z+z')(z+z')^n \\
&= (z+z')\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1} (z')^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1} (z')^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} z^{k'} (z')^{(n+1)-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{l=1}^{n} z^l (z')^{(n+1)-l} \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right) + z^{n+1} + (z')^{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} z^l (z')^{(n+1)-l}\ .
\end{aligned}$$

4. qui était déjà connu des chinois depuis bien longtemps ...

Ceci montre que le propriété P_{n+1} est vraie et termine cette démonstration [5]. □

1.3.3 Inverse et quotient

Les calculs sur les inverses utilisent le résultat simple ci-dessous (à démontrer) :

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} = |z|^2\ .} \tag{1.7}$$

Proposition 1. *Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ et ce dernier vaut $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Démonstration. — Commençons par montrer l'unicité, c'est-à-dire que : pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul donné, si il existe un nombre $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ alors il n'y en aura pas d'autre. *La méthode est très générale et s'applique dans de nombreux cas.* Son principe est facile : pour montrer qu'un objet est unique, on suppose qu'il en existe deux de la sorte et ... on montre que les deux sont confondus ! Pour le cas présent, considérons donc qu'il existe deux nombres complexes z' et $z"$ tels que $zz' = 1$ et $zz" = 1$. On aurait alors : $zz' = zz"$ donc $zz' - zz" = 0$ soit $z(z' - z") = 0$. Or, comme $z \neq 0$, ce produit est nul seulement pour $z' - z" = 0$ c'est-à-dire pour $z' = z"$. L'unicité est donc établie.
Il reste à montrer l'existence. Comme $z\overline{z} = |z|^2$ par la formule (1.7), on a $z\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$ et ainsi, $z' = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ est solution. □

Définition (Inverse d'un nombre complexe). Pour tout nombre complexe z non nul, l'unique z' tel que $zz' = 1$ est appelé *l'inverse* de z et noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$ et vaut

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}\ .$$

Avec la notion d'inverse, on peut maintenant définir le quotient d'un nombre complexe par un autre *non nul*.

Définition (Quotient de deux nombres complexes). Si $z, z' \in \mathbb{C}$ et si $z' \neq 0$, le *quotient* de z par z' noté $\dfrac{z}{z'}$ est défini par [6]

$$\boxed{\frac{z}{z'} := z \times \frac{1}{z'}}\ .$$

En pratique, pour calculer le quotient de deux nombres complexes, la seule idée à retenir est : « *on multiple le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur* » . Cela donne, par exemple :

$$\frac{1+2i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-4+7i}{13} = -\frac{4}{13} + i\frac{7}{13}\ .$$

Ceci permet de transformer le nombre complexe au dénominateur en un nombre réel !

5. Vous aurez remarqué qu'il s'agit là de la même dḿonstration que pour les nombres réels ! Pas étonnant, on utilise les mêmes propriétés de calcul.

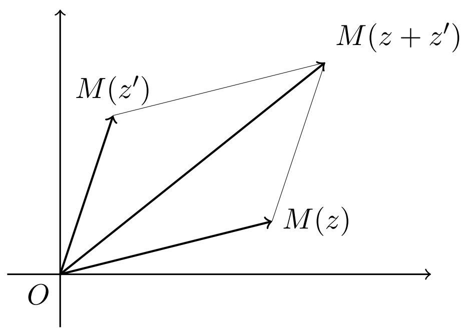
6. Le symbole := n'est pas le signe égal habituel ; il signifie « égal *par définition* » . On l'utilise donc lorsque l'on définit un objet nouveau. Il traduit une dissymétrie : le membre de gauche est le nouvel objet que l'on cherche à définir, alors que le membre de droite est quelque chose qui existe déjà.

Exercice. Calculer le quotient $\frac{z}{z'}$ dans chacun des cas suivants :

1. $z = 1 - i,\ z' = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$,
2. $z = 1 - i,\ z' = 1 + i\sqrt{3}$,
3. $z = -\sqrt{3} - i,\ z' = i$,
4. $z = 3 + 2i,\ z' = 3 - 2i$.

1.3.4 Interprétation géométrique

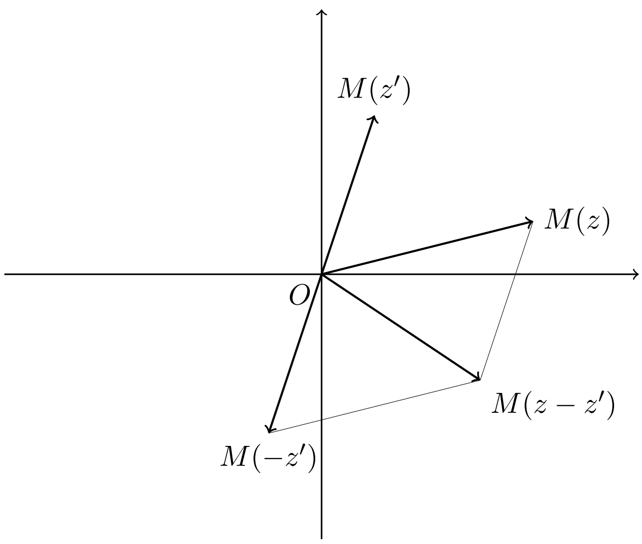
Étant donnés deux nombres complexes $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$, si on note $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$ les vecteurs du plan complexe d'affixe z et z', le nombre $z + z'$ est l'affixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, que l'on obtient en dessinant le parallélogramme suivant.



Exercice.

1. Montrer que la multiplication d'un nombre complexe par i correspond à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Soit λ un nombre réel. Quelle est l'interprétation géométrique de la multiplication d'un nombre complexe par le réel λ ?

Si M et M' sont respectivement les points du plan complexe d'affixe z et z', la différence $z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$. Pour le module on a donc $|z - z'| = MM'$. Ainsi, le cercle de centre A (d'affixe a) et de rayon r est l'ensemble des points du plan ayant pour affixes les nombres complexes z tels que $|z - a| = r$.



Exercice. On considère les points A et B du plan complexe d'affixes respectives $1-5i$ et $-3+3i$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre C d'affixe 3 tangent à Δ.

1.3.4 Conjugaison, module et opérations

Pour terminer cette section, nous donnons quelques relations et propriétés liées à la conjugaison et au module notamment.

Propriétés. La conjugaison des nombres complexes vérifie les propriétés suivantes.

- ◇ $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- ◇ $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.
- ◇ $z = \bar{z}$ si et seulement si z est réel.
- ◇ $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

Les démonstrations sont laissées aux lecteur-trice-s comme un bon exercice. On retiendra que la conjugaison est compatible avec les opérations (première propriété), et qu'elle permet, avec les trois dernières relations, de déterminer si un nombre complexe est réel ou imaginaire pur.

Propriétés. Le module des nombres complexes vérifie les propriétés suivantes.

- ◇ $|z|^2 = z\bar{z}$, déjà vue en (1.7).
- ◇ $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ et $|z| = |\bar{z}|$.
- ◇ $|z.z'| = |z|.|z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- ◇ $|z+z'| \leq |z| + |z'|$, (inégalité triangulaire).
- ◇ $\big||z| - |z'|\big| \leq |z-z'|$.

On retiendra que le module est compatible avec le produit et le quotient (troisième propriété). Par contre, on a seulement une inégalité pour la somme, qui correspond à *l'inégalité triangulaire* de le représentation graphique.

Démonstration. —

- ◇ La deuxième propriété s'obtient par calculs directs.
- ◇ Pour la troisième on peut par exemple utiliser (1.7) et la première propriété précédente.
- ◇ La démonstration de l'inégalité triangulaire n'est pas directe. Avec (1.7), on a

$$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' \ .$$

Or $\bar{z}z' = \overline{\overline{z\bar{z}'}}$, donc $z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| = 2|z||z'|$.
Ainsi, on obtient avec la première égalité

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2 \ ,$$

ce qui donne l'inégalité triangulaire puisque deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés (la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

◇ La dernière inégalité se déduit de la précédente, en écrivant $z = (z - z') + z'$. □

Exercice.

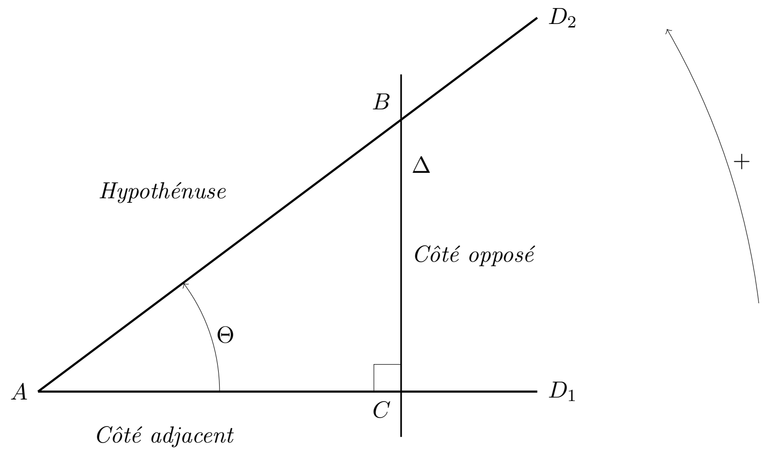
1. Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 0$. Construire le point M' d'affixe $\frac{1}{z}$.
2. Comment faut-il choisir z pour que $Z := \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit réel ?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z+1)(\bar{z}-i)$ soit un imaginaire pur.

1.4 Trigonométrie

1.4.1 Angles orientés et première définition

Les fonctions trigonométriques s'appliquent à des angles orientés, notion que nous commençons donc par définir.

Définition (**Angle orienté**)**.** Un *angle orienté* Θ est défini par deux demi-droites D_1 (demi-droite initiale) et D_2 (demi-droite finale) partant d'un même point A.



On choisit le sens *inverse* de parcourt des aiguilles d'une montre comme orientation positive du plan.

Considérons un point C de la demi-droite D_1 et traçons la perpendiculaire Δ à D_1 passant par C. Elle coupe la demi-droite D_2 en un point B. On obtient ainsi un triangle rectangle ABC. On pourrait alors définir les fonctions trigonométriques de la manière suivante.

Définition (**Cosinus, sinus, tangente**)**.**

◇ Le *cosinus* de l'angle Θ est défini par

$$\boxed{\cos\Theta := \frac{||AC||}{||AB||} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}\ .$$

◇ Le *sinus* de l'angle Θ est défini par

$$\boxed{\sin\Theta := \frac{||BC||}{||AB||} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}\ .$$

◇ La *tangente* de l'angle Θ est définie par

$$\boxed{\tan\Theta := \frac{||BC||}{||AC||} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}}\ .$$

On remarque immédiatement la relation :

$$\boxed{\tan\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}}\ .$$

Attention. Est-ce que le cosinus, le sinus et la tangente sont ainsi bien définis ? Il y a en effet un problème potentiel : nous avons choisi un point C quelconque. Or, si on considère un autre point C' de la demi-droite D_1, la longueur $||AC'||$, par exemple, est différente de la longueur $||AC||$ ...
Dans ce cas, à partir du nouveau point C', effectuons les mêmes constructions que précédement avec C. On considère donc la perpendiculaire Δ' à la demi-droite D_1 passant par C'. Cette dernière coupe la demi-droite D_2 en B'. On peut alors utiliser le théorème attribué à Thalès pour conclure que les rapports suivants sont égaux :

$$\frac{||AC||}{||AB||} = \frac{||AC'||}{||AB'||}, \quad \frac{||BC||}{||AB||} = \frac{||B'C'||}{||AB'||}, \quad \text{et} \quad \frac{||BC||}{||AC||} = \frac{||B'C'||}{||AC'||}\ .$$

Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont donc bien définies. On peut les calculer en utilisant n'importe quel point C de D_1. (Ouf !)

Cette construction qui définit les fonctions trigonométriques fonctionne bien pour un angle Θ aigu, mais elle ne tient déjà plus si on prend un angle droit. Pour pallier ce problème, on va considère une nouvelle définition plus générale des fonctions trigonométriques.

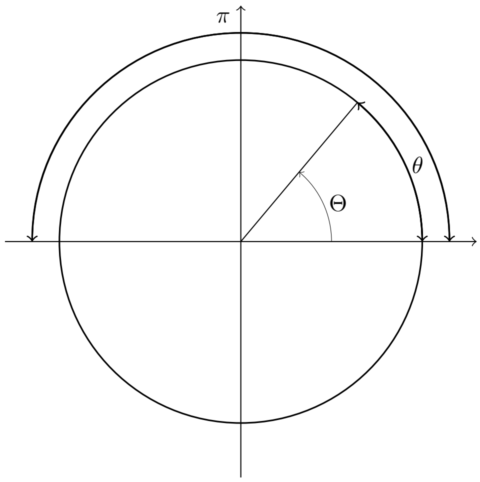
1.4.2 Cercle trigonométrique et mesure d'angles orientés

Dans la suite, on considère le plan P est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition (Cercle trigonométrique). Le cercle orienté $\mathcal{C}$ centre O et de rayon 1 est appelé le *cercle trigonométrique.*

On peut mesurer un angle orienté Θ, c'est-à-dire lui associer un nombre réel θ à la partie située entre les deux demi-droites D_1 et D_2.

Définition (Mesure d'angle orienté). La *mesure* d'un angle orienté est égale à la longueur de l'arc correspondant sur le cercle trigonométrique. L'unité de mesure s'appelle le *radian.*



Par exemple, la mesure de l'angle plat vaut $\pi \approx 3,14\ldots$ qui est la longueur du demi-cercle trigonométrique.

ATTENTION. Tout angle se mesure, mais cette mesure **n'est pas unique**, elle n'est bien définie que modulo l'ajout d'un multiple de 2π, ce qui correspond à faire plusieurs tours sur le cercle trigonométrique.

Prenez bien soin à ne pas confondre un *angle* Θ (défini par deux demi-droites) et une *mesure* θ de l'angle (un nombre); c'est d'ailleurs pour cela que nous avons représenté le premier par une majuscule et le second par une minuscule [7].

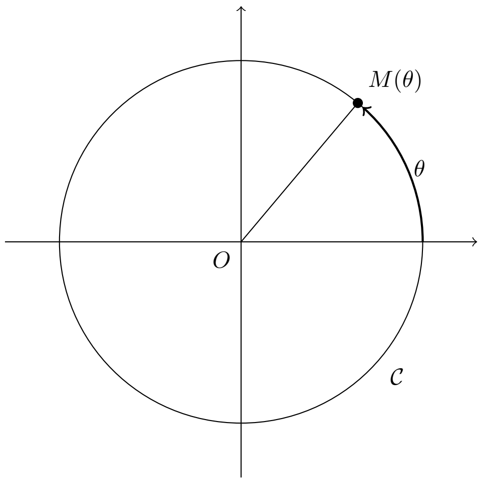
Définition (**Angle polaire**)**.** L'*angle polaire* d'une demi-droite $[OB)$ d'origine l'origine du repère, est l'angle orienté (OA, OB) où A est le point de coordonnées $(1, 0)$.

En d'autres termes l'angle polaire de la demi-droite $[OB)$ est l'angle orienté représenté par la demi-droite de l'axe des abscisses positifs et la demi droite $[OB)$.

1.4.3 Définition générale du cosinus, du sinus et de la tangente

Grâce à la mesure d'angle, on peut identifier un angle avec une de ses mesures et définir sinus, le cosinus et la tangente en toute généralité de la manière suivante. À tout nombre réel θ, on associe le point $M(\theta)$ intersection du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ avec la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ en radian.

7. Voyez ce que la rigueur mathématique pousse à faire.



Autrement dit, le point $M(\theta)$ est la seconde extrémité de l'arc de cercle de $\mathcal{C}$ d'origine $(1, 0)$ obtenu de la façon suivante :

- ◇ Si $\theta \geq 0$, on considère sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ un arc de cercle de longueur θ dans le sens positif à partir du point $(1, 0)$.
- ◇ Si $\theta < 0$, on considère sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ un arc de cercle de longueur $|\theta|$ dans le sens négatif à partir du point $(1, 0)$.

Définition (Cosinus, sinus et tangente).

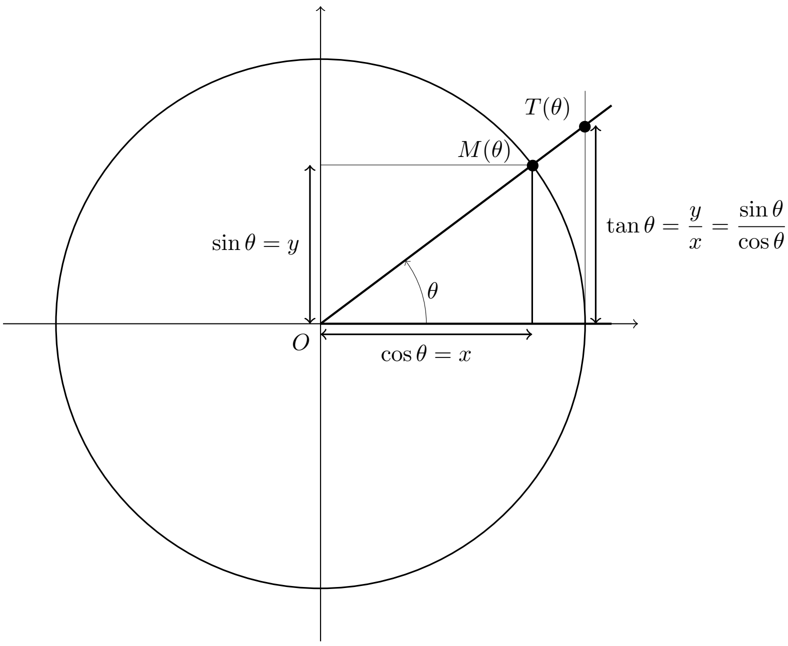
- ◇ Le *cosinus* du nombre réel θ est l'abscisse du point $M(\theta)$; on le note $\cos\theta$.
- ◇ Le *sinus* du nombre réel de θ est l'ordonnée du point $M(\theta)$; on le note $\sin\theta$.
- ◇ La *tangente* du nombre réel de θ est la pente de la droite $(OM(\theta))$; on la note $\tan\theta$.

ATTENTION. La tangente **n'est bien définie que** pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On appelle *axe des tangentes* la droite d'équation $x = 1$ formée des points du plan d'abscisse 1.

Proposition 2. *La tangente* $\tan\theta$ *est égale à l'ordonnée du point d'intersection* $T(\theta)$ *de la droite* $(OM(\theta))$ *avec l'axe des tangentes. Cette dernière vaut*

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\ .$$



1.4.4 Propriétés du cosinus, du sinus et de la tangente

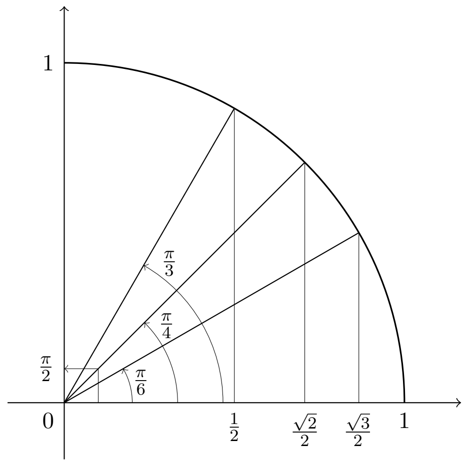
On trouvera ci-dessous le tableau des valeurs caractéristiques du cosinus, du sinus et de la tangente.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Pour s'en souvenir, on peut utiliser le moyen mnémotechnique suivant :

$$\boxed{1 = \frac{\sqrt{\mathbf{4}}}{2},\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2},\ \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2},\ \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{1}}}{2},\ 0 = \frac{\sqrt{\mathbf{0}}}{2}}\,.$$

On peut aussi tracer le cercle trigonométrique.



Exercice.

1. Tracer dans le plan complexe l'axe des tangentes et placer les points $M(\theta)$ et $T(\theta)$ pour
$$\theta \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$
2. En déduire les valeurs correspondantes de $\tan\theta$.

Proposition 3 (**Périodicité**)**.** *Puisque le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π, on a pour tout réel θ, $M(\theta) = M(\theta + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période 2π.*

$$\boxed{\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi) \qquad \textit{et} \qquad \sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi)}\,.$$

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a $T(\theta) = T(\theta + k\pi), k \in \mathbb{Z}$, la fonction tangente est donc périodique de période π.

$$\boxed{\tan(\theta) = \tan(\theta + \pi)}\,.$$

De manière plus générale, nous avons les relations suivantes.

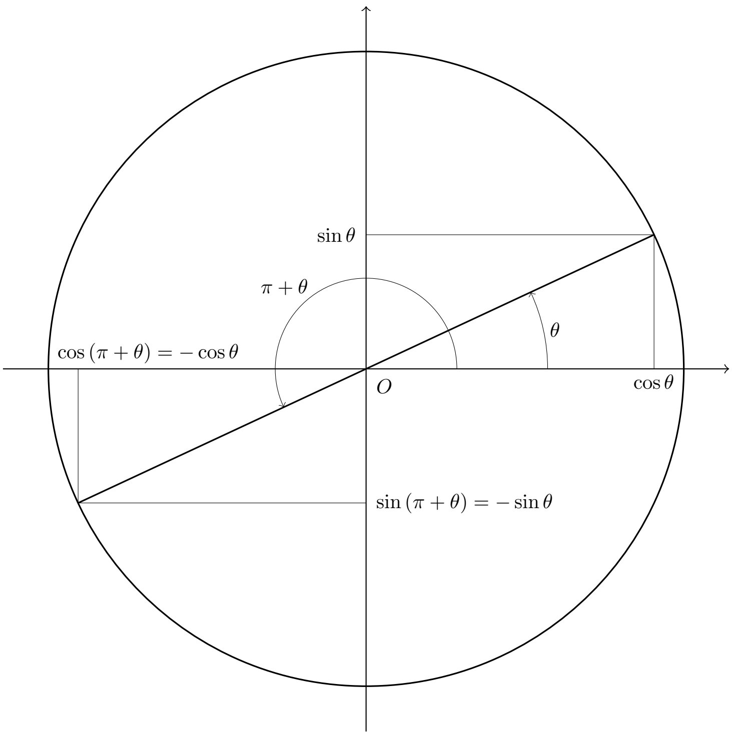
Propriétés.

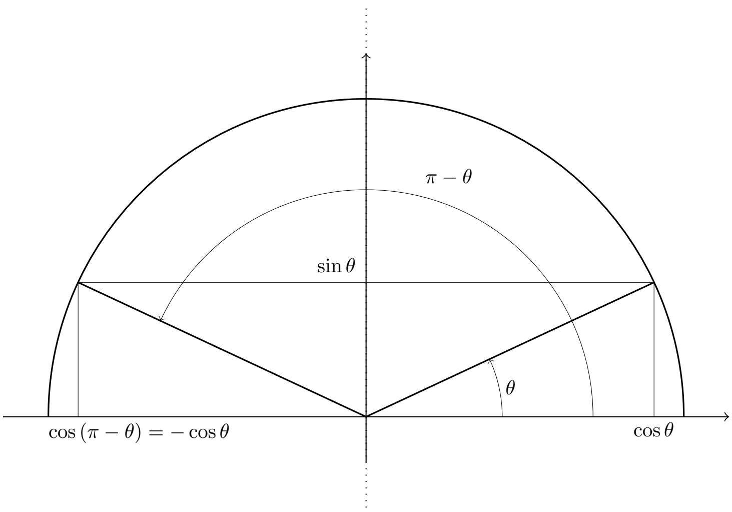
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \sin(-\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta & \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta & \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta & \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta & \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta & \end{array}}$$

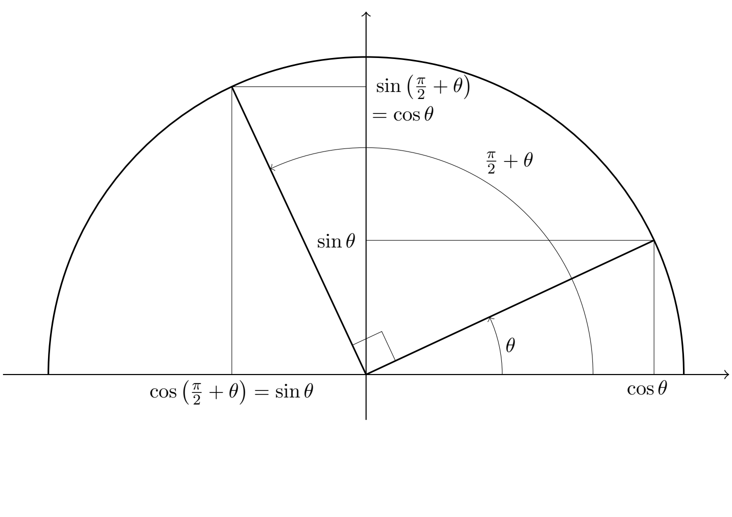
De même pour $\tan\theta$, en considérant les relations précédentes, on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta.}$$

Il va de soi qu'il faut savoir ces formules. Remarquez qu'on peut les retrouver rapidement en dessinant le cercle trigonométrique, cf. les exemples donnés dans les figures suivantes.


$\sin\theta$
$\pi+\theta$
θ
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
O
$\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$


$\pi-\theta$
$\sin\theta$
θ
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\cos\theta$


$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$
$= \cos\theta$
$\frac{\pi}{2}+\theta$
$\sin\theta$
θ
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\theta$
$\cos\theta$

Plus généralement, nous avons les formules suivantes dues à De Moivre.

Théorème 2 (Formules de De Moivre)**.**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ , \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ , \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ , \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ , \\ \cos 2\alpha & = & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ , \\ \sin 2\alpha & = & 2\sin\alpha\cos\alpha \ , \\ \tan(\alpha+\beta) & = & \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \ . \end{array}}$$

Enfin, on se souviendra qu'en appliquant le théorème attribué à Pythagore, on obtient la relation

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1} \ .$$

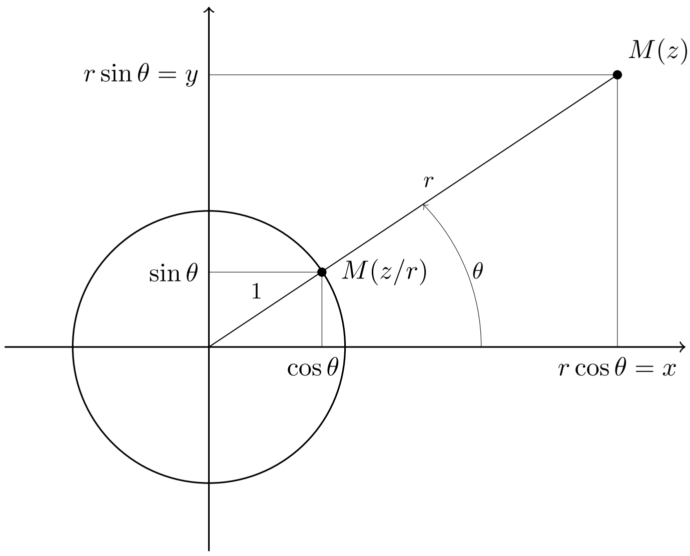
Exercice.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Exprimer en fonction de $\tan\theta$, les réels
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \ .$$
2. Démontrer la formule suivante : $\boxed{1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$.

1.5 Forme polaire d'un nombre complexe

1.5.1 Coordonnées polaires

Pour repérer un point M dans le plan, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y), mais aussi les coordonnées polaires (r, θ) où r est la longueur du segment OM et θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.



Propriétés. Les relations entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires sont données par les formules suivantes.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\theta \quad = \quad \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}} \; .$$

Tout nombre complexe $z = x + iy$ peut donc s'écrire sous la forme $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, avec r un nombre réel positif.

Définition. L'écriture

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

avec $r \geq 0$ est appelée la *forme trigonométrique* de z. Dans ce cas, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est le module de z. On appelle la mesure d'angle θ *un argument* de z (car θ est défini seulement modulo 2π) et on le note $\arg(z)$.

Remarque. Deux nombres complexes non nuls, exprimés sous forme polaire, sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et si leurs arguments diffèrent de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La méthode pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = x + iy$ est assez simple : on commence par calculer son module $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, puis on le factorise par son module

$$z = |z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) ,$$

enfin on reconnait, des valeurs connues du cosinus et du sinus d'un même angle.

Exemple. On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. On commence par calculer son module

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \; .$$

On factorise ensuite z par son module pour faire apparaître $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\cos\theta} + i\,\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\sin\theta}\right) .$$

Du tableau des valeurs des fonctions trigonométriques donné ci-dessus, on sait que seul l'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{4}$ vérifie $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Au final, la forme trigonométrique de z est

$$\boxed{z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} \; .$$

Exercice. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1 - i, \quad -1 + i, \quad i, \quad 1 + i\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} - i \; .$$

La forme trigonométrique se prête particulièrement bien au calcul du produit (et du quotient) de nombres complexes.

Propriétés. Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ deux nombres complexes exprimés sous forme trigonométrique. Leur produit vaut

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))}\ .$$

On en déduit les relations :

$$\boxed{|\, z_1 z_2 \,| = |\, z_1 \,|\ |\, z_2 \,| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}}$$

et si $z \neq 0$,

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|\, z \,|}} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}}\ .$$

Démonstration. — La première formule découle directement de la formule de De Moivre :

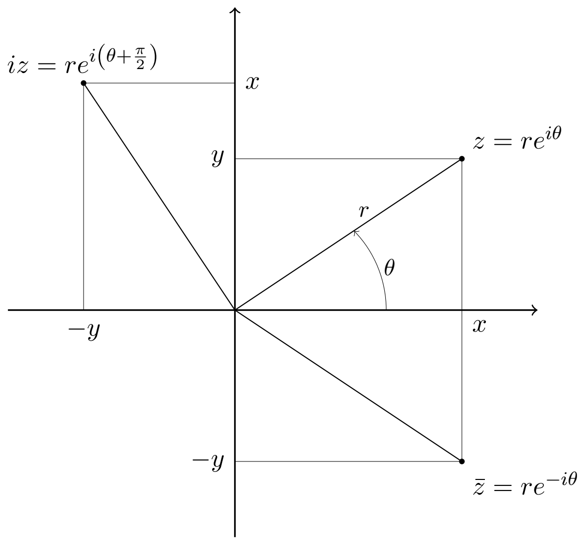
$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&\quad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\
&\underbrace{=}_{\text{formules de de Moivre}} r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\ .
\end{aligned}$$

Le reste se montre directement. □

Comme l'image dans le plan du conjugué d'un nombre complexe est donnée par le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on a la relation

$$\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}}\ .$$

1.5.2 Écriture exponentielle de la forme polaire



Définition (Forme polaire). Par convention, on note tout nombre complexe de module 1 sous la forme :

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta} \ .$$

Dès lors, on peut l'utiliser pour représenter tout nombre complexe :

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \ ,$$

où $r = |z|$. Cette écriture est appelée la *forme polaire* du nombre complexe z.

Grâce aux formules de De Moivre, on voit que cette exponentielle complexe vérifie les mêmes règles de calcul que l'exponentielle réelle :

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)} \ .$$

Avec cette écriture, les différentes propriétés, que nous avons rencontrées précédement, s'écrivent de manière suivante.

- ⋄ Égalité : $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi\ ) \end{cases}$.
- ⋄ Conjugaison : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- ⋄ Module : $\left|re^{i\theta}\right| = r$.
- ⋄ Produit : $(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- ⋄ Quotient : pour $r_2 \neq 0$, $\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Exercice. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad 3e^{-2i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad 3e^{i\pi}, \ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \ .$$

1.5.3 Interprétation géométrique

Produit par un nombre complexe de module 1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$, de module $|\omega| = 1$, donc $\omega = e^{i\theta_0}$. Considérons l'application R_{θ_0} de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à z associe ωz. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\omega z = re^{i(\theta+\theta_0)}$, c'est-à-dire que ωz est le nombre complexe de même module que z et d'argument $\theta + \theta_0$. L'application R_{θ_0} est donc la rotation d'angle θ_0 et de centre O.

Produit par un nombre complexe non nul. Considérons maintenant $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = \rho_0 e^{i\theta_0}$, et l'application qui à z associe az. On a $az = \rho_0 re^{i(\theta+\theta_0)}$, c'est-à-dire que le point d'affixe az a pour module $\rho_0 r$ et pour argument $\theta + \theta_0$. On l'obtient donc en faisant tourner autour de O le point d'affixe z d'un angle θ_0, puis en faisant une homothétie de rapport ρ_0 (ou en faisant l'homothétie puis la rotation, l'ordre n'a ici pas d'importance).

Construction de l'inverse d'un nombre complexe non nul. Si $z = re^{i\theta} \neq 0$, alors $z^{-1} = 1/z = (1/r)e^{-i\theta}$, c'est-à-dire le nombre complexe de module $1/r$ et d'argument $-\theta$. On effectue donc une symétrie par rapport à l'axe Ox, suivie d'une homothétie de rapport $1/|z|^2 = 1/r^2$. La transformation géométrique qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $\bar{z}^{-1}$ s'appelle *l'inversion.*

1.5.4 Formules d'Euler et linéarisation

Théorème 3 (Formules d'Euler). *Tout $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}} .$$

Démonstration. — La démonstration découle directement de la forme polaire, par exemple :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)+(\cos\theta - i\sin\theta)}{2} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta .$$

□

On peut utiliser ces formules pour linéariser les expressions $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, ce qui revient à en donner une expression qui ne contient *aucun produit* de fonctions trigonométriques. Cette opération est possible, en utilisant deux fois les formules d'Euler : d'abord on développe

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$$

à l'aide de la formule du binôme, puis on réordonne les termes afin d'utiliser les formules d'Euler dans l'autre sens pour faire apparaître à nouveau des $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\boxed{\cos^3\theta} &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{2^3} \\
&= \frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2^3}\left[e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\sin^3\theta} &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{2^3 i^3} \\
&= \frac{-1}{2^3 i}\left[e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right] \\
&= \boxed{\frac{-1}{4}\sin(3\theta)+\frac{3}{4}\sin\theta} .
\end{aligned}$$

Exercice. Linéariser $\cos^4\theta$, $\sin^4\theta$ et $\cos^3\theta\sin^2\theta$.

1.5.5 Formule de De Moivre et application

La formule de De moivre vue précédement se généralise de la manière suivante.

Théorème 4 (Formule de De Moivre). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n} \ ,$$

ce qui est équivalent à

$$\boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n} \ .$$

Démonstration. — La démonstration peut se faire par récurrence. Elle est laissée aux lecteur-trice-s comme un bon exercice. □

Cette formule permet de calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ de la manière suivante, qui est en fait l'opération inverse de la linéarisation. Pour la réaliser, on utilise le fait que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle (et que $\sin(n\theta)$ est la partie imaginaire) de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$, expression que l'on développe à l'aide de la formule du binôme.

Exemple. Pour $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) =& (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
=& \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\
=& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \ .
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) =& \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
\sin(3\theta) =& 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \ .
\end{aligned}$$

Si on le souhaite, on peut améliorer ces égalités en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) =& 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\
\sin(3\theta) =& 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \ .
\end{aligned}$$

Exercice. Écrire $\cos(4\theta)$, $\sin(4\theta)$ et $\cos(3\theta)\sin(2\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

1.6 Racines n^{e} d'un nombre complexe

1.6.1 Le cas général

Définition (Racine n^{e} d'un nombre complexe). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine n^e du nombre complexe* z_0 tout nombre complexe ω vérifiant $\omega^n = z_0$.

Exemple. Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine carrée de i, c'est-à-dire $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = i$, et i est une racine carrée de -1, c'est-à-dire $i^2 = -1$. Donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine quatrième de -1, c'est-à-dire $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^4 = -1$.

Remarque. Les racines n^{e} de z_0 sont les nombres complexes ω solutions de l'équation $z^n - z_0 = 0$ d'inconnue z. Le nombre 0 est la seule racine n^{e} de 0 car :

$$z^n = 0 \Leftrightarrow |z^n| = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0\ .$$

Théorème 5. *Tout nombre complexe z_0 non nul possède exactement n racines n^e distinctes. Explicitement, si $\rho_0 e^{i\theta_0}$ est la forme polaire de z_0, alors les racines n^e de de z_0 sont de la forme :*

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)} \qquad avec \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}}\ .$$

Démonstration. — On cherche tous les nombres complexes $\omega = re^{it}$ qui vérifient l'équation $\omega^n = \rho_0\, e^{i\,\theta_0}$.
D'après la propriété d'égalité de deux nombres complexes, sous forme polaire, on a :

$$r^n e^{nit} = \rho_0\, e^{\,i\theta_0} \quad \Longleftrightarrow \quad r^n = \rho_0 \text{ et } nt = \theta_0 + 2k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho_0} \text{ et } t = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\ .$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)}$$

est racine et toutes les racines sont de cette forme.
Montrons qu'il n'y a, en fait, que n racines distinctes. On montre déjà qu'il y a au moins n racines : posons $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Chaque re^{it_k} est racine, et ils sont deux à deux distincts : en effet, supposons que $re^{it_k} = re^{it_l}$, $k \neq l$, alors il existe un certain $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $t_k - t_l = 2m\pi$, soit $k - l = mn$. Comme $0 \leq k, l \leq n-1$, on a $|k-l| \leq n-1$, donc $|m|n \leq n-1$, ce qui force $m = 0$ et donc $k = l$. On montre maintenant qu'il y a au plus n racines de cette forme. Supposons maintenant que l'on ait une autre racine ω, d'argument $t_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{k}{n}2\pi$ pour $k < 0$ ou $k > n-1$. Alors la division euclidienne de k par n montre qu'il existe $0 \leq k' \leq n-1$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $k = nm + k'$, et l'argument t_k s'écrit donc $\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi + m2\pi$. Ainsi

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi + m2\pi\right)} = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{k'}{n}2\pi\right)} = \omega_{k'},$$

ce qui achève la preuve. □

Exemple. Calculons les racines carrées de $1-i$. On commence par écrire $1-i$ sous forme polaire : $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Si $z = re^{i\theta}$ est solution de $z^2 = 1-i$, alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Par conséquent,

$$\begin{cases} r^2 & = & \sqrt{2} \\ 2\theta & = & -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ , \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} r & = & \sqrt[4]{2} \\ \theta & = & -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases},$$

où $k \in \mathbb{Z}$. On a donc deux solutions :

$$\boxed{z_1 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}}\ .$$

1.6.2 Racines n^{e} de l'unité.

On s'intéresse ici au cas où $z_0 = 1$, c'est-à-dire aux solutions complexes de l'équation en z :

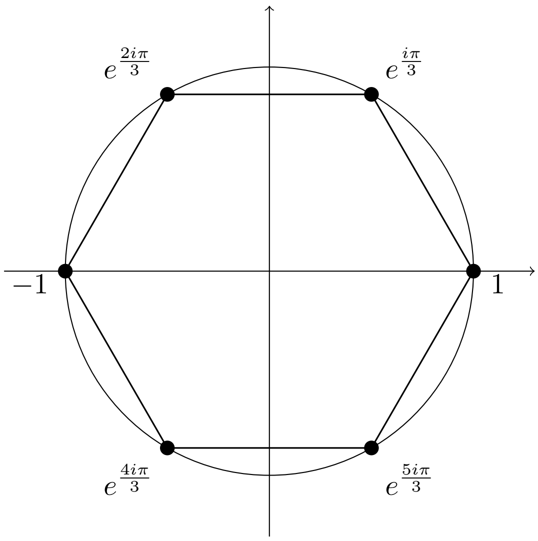
$$z^n = 1 \ .$$

Le théorème précédent donne.

Théorème 6. *Les n racines n^e de l'unité sont :*

$$\boxed{\omega_k = e^{i\frac{k}{n}2\pi} \quad \textit{avec} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}} \ .$$

Exemple. Les racines 6^{e} de l'unité forme un hexagone régulier sur le cercle unité.



Propriétés. Soit ω_k est une racine n^{e} de l'unité autre que 1, c'est-à-dire que k n'est pas un multiple de n, alors on a

$$\boxed{1 + \omega_k + \omega_k^2 + \cdots + \omega_k^{n-1} = 0} \ .$$

Démonstration. — Pour montrer cette propriété, il suffit de multiplier par $\omega_k - 1$ le membre de gauche de l'expression précédente et de remarquer que

$$(\omega_k - 1)(1 + \omega_k + {\omega_k}^2 + \cdots + {\omega_k}^{n-1}) = {\omega_k}^n - 1 = 0 \ .$$

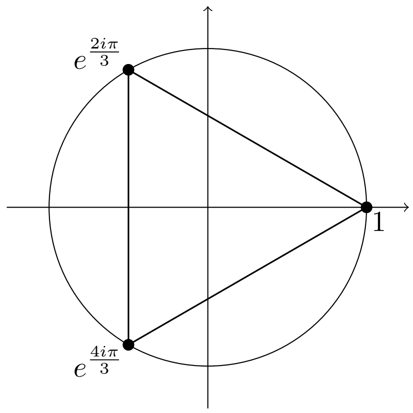
Et comme $\omega_k \neq 1$, on obtient la formule voulue :

$$1 + \omega_k + {\omega_k}^2 + \cdots + {\omega_k}^{n-1} = 0 \ .$$

□

Exemple. D'après le théorème précédent, les racines cubiques de l'unité sont

$$1, \ e^{2i\pi/3} \text{ et } e^{4i\pi/3} \ .$$



Par convention, on pose

$$\boxed{j = e^{2i\pi/3}} .$$

On en déduit :

$$\boxed{j^2 = \overline{j} = e^{4i\pi/3}} .$$

On retiendra que les racines cubiques de l'unité sont : 1 , j et j^2 et qu'elles vérifient (comme prévue) la relation

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0} .$$

Exercice. Soit z un nombre complexe non nul et soit d une racine n^{e} de z.

1. Montrer qu'il suffit de multiplier d par les racines n^{e} de l'unité pour obtenir les racines n^{e} de z.
2. Déterminer les racines cubiques de -8.
3. Factoriser l'expression $z^3 + 8$ sur $\mathbb{C}$.

1.6.3 Racines carrées d'un nombre complexe sous forme cartésienne

Étant donné un nombre complexe $z_0 = x_0 + iy_0$ *sous forme cartésienne*, on cherche les nombres complexes $z = x + iy$, *sous forme cartésienne*, tels que $z^2 = z_0$. Plutôt que de donner des formules générales (et donc compliquées), on se contente d'expliquer comment cela fonctionne sur un exemple.

Exemple. Retour sur le calcul des racines carrées de $z_0 = 1 - i$.
Soit $z = x + iy$ une solution de $z^2 = z_0$ alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = 1 - i$.
On en déduit :

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{et} \quad xy = -\frac{1}{2} .$$

Par ailleurs, on considère l'égalité des modules $|z|^2 = |1 - i|$ qui donne

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2} .$$

On aboutit donc au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x^2 - y^2 & = & 1 \, , \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{2} \, , \\ xy & = & -\dfrac{1}{2} \, . \end{array} \right.$$

On trouve $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

et $y^2 = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$ soit

$$y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} \ .$$

Enfin, comme $2xy = -1$, on sait que x et y sont de signe opposé. Ainsi, les solutions sont

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}} \ .$$

1.7 Équation du second degré à coefficients complexes

Dans cette section, on revient sur le sujet avec lequel nous avons entamé ce chapitre : les équations du second degré. Nous allons voir que les formules pour résoudre les équations du second degré à coefficients réels « fonctionnent » aussi dans le cas complexes. On peut même alors plus loin, car dans le cas complexe, on trouve toujours deux solutions (comptées avec multiplicité).

Théorème 7. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Alors l'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions complexes (comptées avec multiplicité).

Démonstration. — On procède comme dans le cas réel, à savoir que l'on écrit algébriquement :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \ .$$

Donc l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \ .$$

On définit toujours le discriminant par $\Delta = b^2 - 4ac$, et on distingue cette fois-ci deux cas :

- ◇ Si $\Delta \neq 0$, alors $\Delta = b^2 - 4ac$ admet deux racines carrées complexes distinctes, notées δ et $-\delta$. Alors les solutions sont

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \text{ et } z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$$

  et elles sont distinctes.

◇ Si $\Delta = 0$, alors $-\dfrac{b}{2a}$ est racine double.

□

Remarque. Dans le cas particulier des coefficients réels, le discriminant est réel, $\Delta \in \mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes, si $\Delta < 0$ il y a deux racines complexes conjuguées.

Exemple. Résolvons l'équation

$$z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0 \ .$$

On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i \ .$$

On cherche ensuite les nombres complexes $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$$(x+iy)^2 = 7 - 24i \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \ , \\ 2xy = -24 \ . \end{array} \right.$$

En ajoutant l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \\ xy = -12 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy = -12 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \\ xy = -12 \ . \end{array} \right.$$

Par conséquent, le discriminant Δ admet deux racines carrées : $\delta = 4 - 3i$ et $-\delta = -4 + 3i$. Au final, les deux solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2+i+4-3i}{2} = \boxed{3-i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2+i-4+3i}{2} = \boxed{-1+2i} \ .$$

1.8 Exercices sur les nombres complexes

Exercice 1. Dessiner les ensembles déterminés dans le plan complexe par les conditions suivantes :

1. $|z| < 1$;
2. $z + \bar{z} = 1$;
3. $z - \bar{z} = i$;
4. $|z - 1| = |z + 1|$;
5. $|z - 1,5| = |z + i|$;
6. $z + \bar{z} = z^2$.

Exercice 2. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{2i}, \quad \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}, \quad \frac{3+4i}{2-3i} .$$

Exercice 3. Faire le dessin qui justifie les relations

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta .$$

Exercice 4. Soit x un nombre réel qui n'est pas un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$. On pose

$$t := \tan\left(\frac{x}{2}\right) .$$

Montrer que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} .$$

Exercice 5. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$-5, \quad 2i, \quad 2\,e^{-5i}, \quad -8\,e^{\frac{4\pi}{7}i},$$

$$-1 - i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \quad (\sqrt{3}-i)^{2004} .$$

Exercice 6. Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$(1+i)^{100}, \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} .$$

Exercice 7. Déterminer les limites éventuelles des suites de nombres complexes suivantes :

$$u_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n, \quad v_n = 1 + \frac{1}{n}e^{\frac{in\pi}{4}}, \quad w_0 = 1 \quad \text{et} \quad w_n = w_{n-1}e^{\frac{i\pi}{2^{n-1}}} .$$

Exercice 8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Déterminer le module et un argument de $z = 1 + e^{i\theta}$.
2. En déduire le module et un argument de $(1 + e^{i\theta})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+bk)}$.

   En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+bk)$.

Exercice 9. Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$ et $\sin^4 x \cos^3 x$.

Exercice 10. Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$, puis $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$. En utilisant le fait que $\cos \frac{5\pi}{10} = 0$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^6 = 8i$;
2. $z^3 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Exercice 12. Racines cubiques de l'unité.

1. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$.

   Déterminer la forme cartésienne de $\dfrac{1-j}{1+j}$.
2. Soit $P(z) = z^2 - 3z + 2$. Calculer $P(1) + P(j) + P(j^2)$.

Exercice 13. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$-1 + 4i\sqrt{3}, \quad -7 - 6i\sqrt{2} .$$

Exercice 14.

1. Donner sous forme cartésienne les racines de l'équation :

$$iz^2 + (3-4i)z - 7 + i = 0 .$$

   En déduire les racines de l'équation :

$$-iz^2 + (3+4i)z - 7 - i = 0 .$$

2. Même question avec $(3+7i)z^2 - 8(1+2i)z + 4(1+i) = 0$.

Exercice 15. Soit A l'ensemble des racines 5ᵉ de l'unité différentes de 1.

1. Quels sont les éléments de A ?
2. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
3. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $X = x + \dfrac{1}{x}$ est solution de $X^2 + X - 1 = 0$.
4. Résoudre $X^2 + X - 1 = 0$.
5. En déduire les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 16. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, et A le point d'affixe R.

1. Dans cette partie, $n \geq 2$ est un nombre entier fixé.
   On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$.
   On considère la suite de points $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
   $$M_0 = A \quad , \quad \forall\, k \geq 0 \quad M_{k+1} = r\,(M_k).$$
   Et on note z_k l'affixe de M_k.
   (a) Pour $k \geq 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.
   (b) Calculer z_k en fonction de k.
   (c) Pour $k \geq 0$, calculer la longueur M_kM_{k+1}.
   (d) Comparer M_n et M_0. Calculer le périmètre L_n du polygone régulier M_0M_1 $M_2 ... M_n$.
2. Déterminer la limite de la suite (L_n) . Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exemples de partiels et d'examens

Exercice 17. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Quel est le module de $\left(\dfrac{1+i\,x}{1-i\,x}\right)^{11}$?
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes w vérifiant : $w^{11} = i$.
3. Montrer que l'équation en x :
   $$\left(\frac{1+i\,x}{1-i\,x}\right)^{11} = i$$
   admet onze solutions réelles que l'on exprimera à l'aide de la fonction tangente.

Exercice 18.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 8 - 6i$.
2. Chercher les racines α_1, α_2, α_3 du polynôme $P(X) = X^3 - (3i-1)X^2 - 4X$.
3. Expliquer pourquoi le triangle défini par les points du plan complexe, d'affixes respectives α_1, α_2, α_3 est un triangle rectangle.

Exercice 19. On cherche les racines complexes de l'équation

$$(2+3i)x^2 + (15+3i)x + 12 - 8i = 0\ . \qquad (\mathcal{E})$$

1. Montrer qu'on peut se ramener à la recherche des solutions d'une équation de la forme :
   $$x^2 + px + q = 0\ ,$$
   où p et q sont des nombres complexes que l'on déterminera.
2. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions numériques

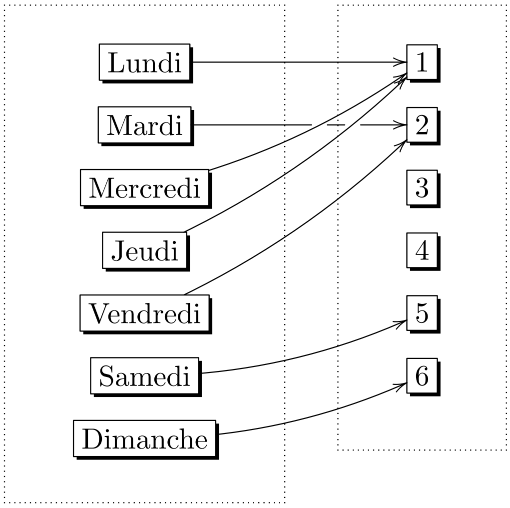
L'objet de ce chapitre est de préciser les éléments de base mais essentiels qui interviennent dans le corpus mathématique des *fonctions numériques*, qui a un nombre en associe un autre par un certain calcul. Ce cours de première année a pour objectif la maîtrise des fonctions de référence (puissances, polynônimales, exponentielles, logarithmes, trigonométriques) et des outils permettant l'étude d'une fonction numérique plus sophistiquée. Mais, plus généralement, ce cours a pour objectif de préciser, c'est-à-dire de définir clairement, les « objets mathématiques » concernés et les outils pour les étudier (dérivée, représentation graphique).

2.1 Notion d'application

2.1.1 Exemples d'application

Exemple. Nous allons modéliser par un objet mathématique les chaînes de télévision que j'ai regardées pendant la semaine dernière. Chaque soir, j'ai regardé un film ou une émission proposé par une de ces chaînes. Appelons les chaînes 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Lundi, mercredi et jeudi, j'ai regardé la première chaîne. Mardi et vendredi, j'ai regardé la deuxième chaîne. Samedi, j'ai suivi le programme de la cinquième chaîne et dimanche celui de la sixième.

Mathématiquement, on considère l'ensemble dit *de départ* composé des jours des la semaine $\{\text{lundi}, \text{mardi}, \ldots, \text{dimanche}\}$ et l'ensemble dit *d'arrivée* $\{1, 2, \ldots, 6\}$ des chaînes de télévision. Puis, on associe à chaque jour une unique chaîne de télévision. Ceci peut se faire graphiquement à l'aide de flèches entre les deux ensembles.



Exemple. Donnons un autre exemple. Considérons une expérience aléatoire dont les issues possibles sont les éléments de l'ensemble Ω, univers des possibles de cette expérience, et dont $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements de cette expérience. Une loi de probabilité sur Ω associe à tout élément A de $\mathcal{E}$, un nombre réel $p(A)$, probabilité de l'évènement A, avec $p(A) \in [0,1]$:

$$p : \mathcal{E} \to [0,1] \ .$$

Ainsi p « applique » tout évènement A sur un nombre $p(A)$ de l'intervalle $[0,1]$, ce nombre étant « fonction » de l'évènement A dont on parle. Les trois données constituées de l'ensemble des événements $\mathcal{E}$, l'ensemble $[0,1]$ et l'association $p : \mathcal{E} \to [0,1]$ c'est-à-dire la donnée pour tout $A \in \mathcal{E}$ du couple

$$(A, p(A)) \in \mathcal{E} \times [0,1]$$

définit une *application*. C'est la connaissance de l'ensemble des couples,

$$G = \{(A, p(A)),\ A \in \mathcal{E} \text{ et } p(A) \in [0,1]\} \ ,$$

qui permet de définir complètement l'association (ou correspondance)

$$p : \mathcal{E} \to [0,1] \ .$$

Cet ensemble G est ce que l'on appelle le *graphe* de l'application p.

2.1.2 Définitions

Définition (Application). Une *application* f est définie par trois données :

- ◇ un ensemble X, appelé *ensemble de départ* de f,
- ◇ un ensemble Y, appelé *ensemble d'arrivée* de f,
- ◇ une « association (ou correspondance) $f : X \to Y$ » , qui associe à tout élément x de X un unique élément y de Y appelé *image* de x par f.

Définition (Graphe d'une application). La donnée de l'association $f : X \to Y$ définissant une application est équivalente à un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y := \{(x, y);\ \ x \in X \text{ et } y \in Y\}$ des ensembles de départ et d'arrivée de la forme suivante

$$G_f := \{(x, y);\, x \in X\,, y = f(x)\} = \{(x, f(x)),\, x \in X\} \subset X \times Y\ .$$

On appelle ce dernier le *graphe* de la fonction f. Il vérifie la propriété cruciale que pour tout $x \in X$, il possède un et un seul élément de la forme (x, y) ; l'élément $y \in Y$ intervenant dans le couple (x, y) est alors appelé l'*image* de x par f et est noté $f(x)$.

On dit alors que f est une application définie sur X à valeurs dans Y ou aussi que f est une application de X vers Y, ce que l'on note $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ ou bien $f : X \to Y$ ou seulement f.

La propriété **fondamentale** des applications et qu'un élément x de X possède **une et une seule** image $f(x)$ dans Y. Dans l'autre sens, tout peut arriver : un élément $y \in Y$ de l'ensemble d'arrivée peut ne jamais être atteint, être atteint une seule fois ou être atteint plusieurs fois. Pour étudier cela, on est amené à considérer les élements de l'ensemble de départ qui sont envoyés sur y par l'application f.

Définition (Antécédent). Si $y \in Y$ est l'image d'un l'élément x de X par f, on dit que x est un *antécédent* de y par f.

Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ne sont pas nécessairement atteints par une application. Pour mesurer ce phénomène, on considère l'ensemble suivant.

Définition (Image d'une application). L'*image d'une application*, noté $f(X)$ ou $\mathrm{Im} f$ est l'ensemble formé des éléments images de l'application f, c'est-à-dire des éléments de Y ayant au moins un antécédent par f.

En notation mathématique, on a donc :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ y = f(x)\}\ .$$

Définition (Image d'un sous-ensemble). Plus généralement, on peut définir *l'image par f d'un sous-ensemble* A de X, par

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}\ .$$

Exercice. Dans le premier exemple donné ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

1. Quel est l'ensemble des antécédents de 2. À quoi correspond cet ensemble en terme de jours de la semaine ?
2. Quel est l'ensemble des antécédents de 4. À quoi correspond cet ensemble en terme de jours de la semaine ?
3. Quelle est l'image de cette application ? À quoi correspond cet ensemble en terme de chaîne de télévision ?
4. Quelle est l'image de l'ensemble {lundi, vendredi, dimanche} par cette application ? À quoi correspond cet ensemble en terme de chaîne de télévision ?
5. Décrire le graphe de cette application.

Exemple. Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons l'application f de P dans $\mathbb{R}$ qui à un point $M(x, y)$ du plan associe sa distance à l'origine du repère, c'est-à-dire :

$$f : P \to \mathbb{R}, \quad M(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} .$$

L'image de $J(-1/2, \sqrt{3}/2)$ est 1 et tous les antécédents de 1 sont les points du cercle de centre O et de rayon 1. Seuls les réels positifs sont des images et l'image de f est donc $\mathbb{R}^+$, soit en notation mathématique $f(P) = \mathbb{R}^+$. Si A est le disque de centre O et de rayon 2, on a $f(A) = [0, 2]$.

Exercice. Déterminer l'image par l'application f de la courbe Γ suivante :

$$\Gamma = \{M(x, y) \in P, \ |x| \leq 1 \text{ et } y = \sqrt{x + 1}\}.$$

Exercice. Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les applications de P dans P suivantes : s_1 la symétrie orthogonale d'axe (Ox), s_2 la symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin s_3 la symétrie centrale de centre l'origine du repère O.

1. Expliciter ces applications.
2. Tracer les images par ces trois applications du sous-ensemble A de P des points de la courbe de la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$, c'est-à-dire :

$$A := \{M(x, y) \in P \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2 - 4x + 3\} .$$

3. Donner l'équation des courbes $s_1(A)$, $s_2(A)$ et $s_3(A)$ de P que l'on obtient.

2.1.3 Egalité, restriction, prolongement et réduction

Une application étant définie par trois données, dès lors, deux applications f et g sont *égales*, ce que l'on note $f = g$, *si et seulement si ces trois données sont égales*. En d'autres termes, cela signifie qu'elles ont *les mêmes ensembles de départ et d'arrivé et qu'elles ont un même graphe*. En particulier, si $f : A \to B$ et $g : A \to B$ ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, on aura :

$$f = g \iff \forall x \in A, \ f(x) = g(x) .$$

Exemple. Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ , \ x \mapsto |x|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ , \ x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont égales puisqu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = \sqrt{x^2} .$$

Comme il vient d'être dit, deux applications qui n'ont pas les mêmes ensembles de départ ne peuvent être égales. Ceci dit, il y a certains cas où deux telles applications ne sont pas totalement « étrangères » . C'est le cas d'une *restriction*, d'un *prolongement* ou d'une *réduction* d'une application $f : X \to Y$ donnée.

Définition (Restriction). Une *restriction* d'une application $f : X \to Y$ est obtenue lorsque l'on restreint l'ensemble de départ X à un de ses sous-ensembles A. On la note par $f|_A : A \to Y$, lire « f restreinte à A » , si l'on veut préciser la filiation. L'ensemble de départ considéré est donc A, l'ensemble d'arrivée est toujours Y et, pour tout $x \in A, \ f|_A(x) := f(x)$.

Exemple. La restriction à $A = \mathbb{R}^-$ de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$ est l'application, $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto -x$. Pour le préciser, on écrira $g = f|_{\mathbb{R}^-}$.

Définition (**Prolongement**). Réciproquement, si g est une restriction de f, on dit que f est un *prolongement* de g.

Pour terminer sur les relations possibles de deux applications, il y a aussi les cas où la différence a lieu aussi sur l'ensemble d'arrivée. Si $f : X \to Y$ est une application dont l'image $f(X)$ de X par f n'est pas tout l'ensemble Y, c'est-à-dire si tous les éléments de Y ne sont donc pas des images par f, on peut alors considérer une application en tout point identique mais où l'ensemble d'arrivée serait un ensemble $f(X) \subset B \subset Y$ intermédiaire entre $f(X)$ et Y.

Définition (**Réduction**). Soit une application $f : X \to Y$ et soit un ensemble $f(X) \subset B \subset Y$. L'application $h : X \to B$ définie par $h(x) := f(x)$ pour tout $x \in X$, est appelée la *réduction de l'application* f *au sous-ensemble* B de l'ensemble d'arrivée.

Exemple. On peut, par exemple, toujours réduire une application à l'ensemble $B = f(X)$ de ses images :

$$h \ : X \to f(X), \quad h(x) := f(x), \quad \forall x \in X \ .$$

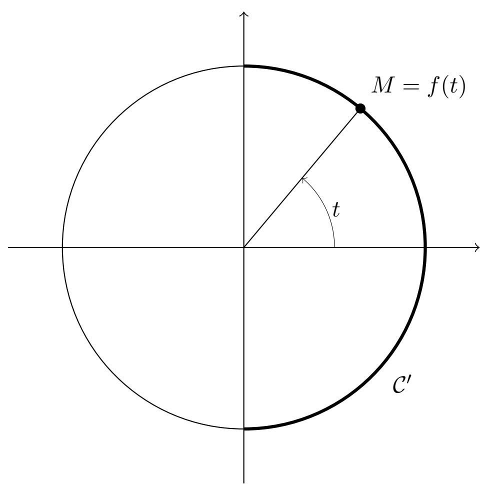
Remaquez que l'on peut faire les deux : restreindre *et* réduire. En effet, on peut commencer par restreindre l'ensemble de départ à un sous-ensemble A de X : $f|_A : A \to Y$ puis réduire l'ensemble d'arrivée à un sous-ensemble $B \subset Y$ de l'ensemble d'arrivée

$$h \ : \ A \to B, \quad h(x) := f(x), \quad \forall x \in A \ .$$

Exemple. Soient P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Considérons l'application

$$f : \mathbb{R} \to P \tag{2.1}$$

qui à un nombre réel t associe le point M, intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite d'origine O et d'angle polaire t radian.



On peut restreindre cette application à l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$ et se réduire à l'image $f(I)$ pour l'arrivée. L'ensemble $f(I)$ est l'ensemble $\mathcal{C}'$ des points de $\mathcal{C}$ d'abscisses positifs, ainsi l'application g obtenue

$$g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathcal{C}', \tag{2.2}$$

l'est à partir de f par restriction à I et réduction aux images.

Exercice. Soient f et g les applications définies en (2.1) et (2.2) de l'exemple précédent.

1. Déterminer l'ensemble des antécédants par f puis par g du point $R(1/2, -\sqrt{3}/2)$, puis du point $S(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
2. Expliciter l'application h obtenue à partir de f par restriction à $[0, \pi]$ et par réduction aux images.
3. Que peut-on dire de $g|_{[0,\pi/2]}$ et $h|_{[0,\pi/2]}$?

2.1.4 Composition d'applications

Une application est un processus qui envoie un élément sur un autre. On peut donc itérer les applications, c'est-à-dire envoyer un premier élément sur un second, puis ce second sur un troisième, et éventuellement continuer.

Définition (Composition). Soient trois ensembles X, Y et Z, et deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. L'application *composée* de f et de g a pour ensemble de départ X et pour ensemble d'arrivée Z. On la note $g \circ f$. Elle est définie par $g \circ f(x) := g(f(x))$:

$$\begin{array}{cl} g \circ f : & X \longrightarrow Z \\ & x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x)) \ . \end{array}$$

Attention, la composition $g \circ f$ **n'existe que si** l'ensemble d'arrivée de la première application est **le même** que l'ensemble de départ de la seconde. Donc en général, l'application $f \circ g$ n'existe pas, sauf si $Z = X$. Et si tel est le cas, ces deux composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes. Des exemples sont donnés dans les deux exercices qui suivent.

Exemple. Soit P le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons les deux applications *coordonnées* p_1 et p_2 de P dans $\mathbb{R}$:

$$p_1 : P \to \mathbb{R},\ \ M(x, y) \mapsto x,\ \ \text{et}\ \ p_2 : P \to \mathbb{R},\ \ M(x, y) \mapsto y\ . \tag{2.3}$$

Avec l'application f définie en (2.1), les compositions $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ définissent les deux fonctions trigonométriques cosinus et sinus :

$$\cos = p_1 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto \cos t,\ \ \text{et}\ \ \sin = p_2 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto \sin t\ .$$

Exercice.

1. Soit X l'ensemble des êtres humains. Définissons les deux applications m et p de X dans lui-même suivantes : $p(x)$ est le père de x et $m(x)$ est la mère de x. Que représente les applications $m \circ p$ et $p \circ m$, sont-elles égales ?
2. Considérons les deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$. Comparer $g \circ f$ et $f \circ g$. Soit maintenant $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$; comparer $f \circ h$ et $h \circ f$.
3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. Donner deux applications f et g telles que l'on ait $h = g \circ f$.

2.2 Fonctions numériques

2.2.1 Définition et exemples

Définition (Fonction numérique). Une *fonction numérique* $f : X \to Y$ est une application dont l'ensemble de départ X et l'ensemble d'arrivée Y sont des sous-ensembles[1] de $\mathbb{R}$. On dit aussi que f est une fonction *d'une variable réelle* à *valeurs réelles*[2].

Exemples.

- Les fonctions polynômiales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: du premier degré : $x \mapsto ax + b,\ (a \neq 0)$, du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0)$ ou de degré n quelconque :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

  sont des fonctions numériques.

- Les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$ et plus généralement les fonctions d'expression une fraction rationnelle, $F(x) = P(x)/Q(x)$, c'est à dire le quotient de deux fonctions polynômiales, d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ et d'ensemble de départ l'ensemble de définition de l'expression $F(x)$, sont des fonctions numériques.

- Les fonctions trigonométriques sinus $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions numériques.

- Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ et logarithme $\ln : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions numériques.

- La fonction partie entière d'un réel $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto E(x)$ est encore un autre type de fonction numérique. Rappelons que pour un réel x, sa partie entière $E(x)$ est l'unique nombre entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Par exemple, la partie entière de $12,21$ est 12 et celle de $-0,17$ est -1.

- Une autre façon de se donner une fonction numérique est de la définir « par morceaux », c'est-à-dire de définir $f(x)$ de plusieurs façons, suivant les valeurs de x. C'est la cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\delta_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad f(x) := \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

  On vous invite fortement à tracer leur représentation graphique (voir section suivante).

2.2.2 Représentation graphique d'une fonction numérique

Nous avons vu précédemment la notion de graphe dans le cadre plus général des applications ; cette notion s'applique bien sur au cas des fonctions numériques. Pour f :

1. Puisque $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on peut considérer les suites réelles comme des fonctions numériques. Ici, nous nous occuperons plutôt des fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles, ouverts ou fermés, mais non réduits à un point.

2. De la même manière, on peut considére des fonctions à variable entière, à variable complexe, ou à plusieurs variables ... et à valeurs entières, complexes, vectorielles, etc.

$X \to Y$ une fonction numérique, son graphe G_f est donc :

$$G_f = \{(x, y),\, x \in X\,, y = f(x)\} = \{(x, f(x)),\, x \in X\}\ . \tag{2.4}$$

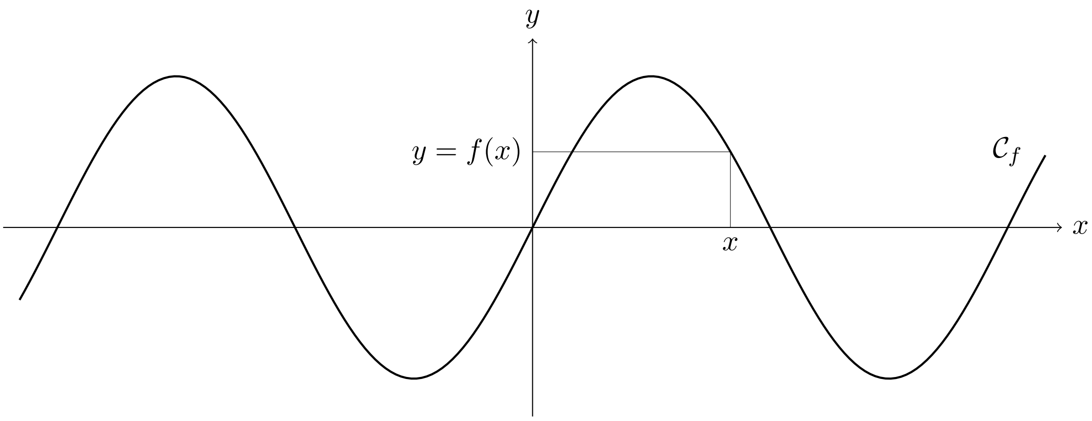
Comme nous travaillons avec une fonction numérique, l'ensemble G_f est ici un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On peut donc le représenter dans le plan repéré P, c'est-à-dire le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition (Représentation graphique). Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique. On appelle *représentation graphique* ou *courbe représentative* de f, l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points $M(x, y)$ du plan repéré P défini par

$$\mathcal{C}_f := G_f = \{M(x, y) \in P \mid x \in X \text{ et } y = f(x)\}\ .$$

On peut encore dire que $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour tous les $x \in X$, soit :

$$\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) \in P \mid x \in X\}\,.$$



Par ailleurs, rappelons dans ce cadre les faits élémentaires suivants :

$$y \in Y \text{ est l'image de } x \in X \text{ par } f \text{ si et seulement si } M(x, y) \in \mathcal{C}_f,$$

et, pour $x \in X$, $\mathcal{C}_f$ ne contient qu'un seul point d'abscisse x, l'ordonnée y de ce point est l'image de x par f (par définition même de la notion de fonction...).

La représentation graphique de la courbe d'une fonction peut servir à mémoriser diverses propriétés de cette fonction. Il est essentiel de connaitre celles des fonctions usuelles, voir le chapitre suivant.

EXERCICES.

1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Formuler en écriture mathématique le fait que f est une fonction paire, que f est une fonction impaire. Dans un repère orthonormé, à quelles propriétés de symétrie de la courbe de f correspondent les propriétés $\ll f$ paire $\gg$ et $\ll f$ impaire $\gg$?

2. Dans un repère orthonormé, donner l'allure des courbes des fonctions suivantes où l'on prendra soin de bien préciser les positions relatives de ces courbes :

$$\begin{aligned}
&f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n, \quad \text{pour } n \in \{0,1,2,3,4,5\}\ , \\
&g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}\ , \\
&g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}\ , \\
&h_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x}\ , \\
&h_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}\ .
\end{aligned}$$

3. Dans un repère orthonormé, donner les représentations graphiques des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f_1 : x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : x \mapsto x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}, \quad f_3 : x \mapsto (x+1)^2 + 1,\ x \in \mathbb{R},$
   (b) $g_1 : x \mapsto \sqrt{x},\ x \geq 0, \quad g_2 : x \mapsto \sqrt{-x},\ x \leq 0, \quad g_3 : x \mapsto \sqrt{1-x} + 1,\ x \leq 1,$
   (c) $h_1 : x \mapsto 2x^2 + 2x - 4,\ x \in \mathbb{R}, \qquad h_2 : x \mapsto |2x^2 + 2x - 4|,\ x \in \mathbb{R},$
   (d) $E_1 : x \mapsto \frac{1}{10}E(10x),\ x \in [0,1] \qquad E_2 : x \mapsto 2E(\frac{x}{2}),\ x \in [-4,4].$

2.2.3 Domaine de définition d'une expression et fonction associée

De nombreuses *expressions* sont obtenues en considérant des sommes, des produits, des quotients et des compositions de fonctions numériques de référence. Pour de nombreuses fonctions numériques, la définition des images est souvent donnée par une expression de ce type, comme par exemple la fonction suivante :

$$g \ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}\ . \tag{2.5}$$

Sur cet exemple, l'image y d'un élément x est donnée par la *formule* :

$$y = \frac{x^2 + \ln(x+1)}{\sin x + 3}\ . \tag{2.6}$$

Définition (Domaine de définition d'une expression). Soit $y = A(x)$ une expression exprimant un réel y au moyen d'un réel x. Le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ sur lequel cette expression est définie[3] est le *domaine de définition* de l'expression $y = A(x)$. La fonction d'ensemble de départ D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les images sont définies par cette expression

$$\left\{\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A(x) \end{array}\right.$$

est appelée *la fonction numérique associée à l'expression* $y = A(x)$.

Exemple. Par exemple, le domaine de définition de l'expression $y = A(x)$ donnée en (2.6) est

$$D =]-1,+\infty[$$

3. C'est-à-dire que pour chaque $x \in X$, l'expression $y = A(x)$ définit un et un seul réel y.

et la fonction numérique associée à cette expression est la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} f: \ ]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+\ln(x+1)}{\sin x+3} \end{array}\right. .$$

Remarque. Toute restriction de f sur un sous-ensemble de X de D donne aussi une fonction dont la donnée des images est définie avec l'expression $y = A(x)$. Par exemple pour $X = [0,+\infty[$, on aboutit à la fonction g dont nous sommes partie en (2.5).

Vocabulaire

- ◇ On utilisera souvent la terminologie ≪ soit f la fonction définie par $f(x) = ...$ ≫ , où les points de suspension représentent une expression fonction de x, cela sous-entend que f est la fonction numérique associée à l'expression $y = f(x)$ c'est-à-dire que

$$\left\{\begin{array}{rcl} f: \ D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}\right. ,$$

  avec D le domaine de définition de l'expression de $y = f(x)$.
- ◇ La formulation ≪ soit f la fonction définie sur X par $f(x) = ...$ ≫ , sous-entend que X est un sous-ensemble de D, qu'il est l'ensemble de départ de f et que $\mathbb{R}$ est l'ensemble d'arrivée, soit au final

$$\left\{\begin{array}{rcl} f: \ X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}\right. .$$

Exercice. Trouver le domaine de définition des expressions $y = A(x)$ suivantes et pour chacunes d'elles donner deux fonctions définies avec l'expression $y = A(x)$.

$$y = \sqrt{-x}, \quad y = \sqrt{x^2-x-2}, \quad y = \sqrt{x^2}, \quad y = (\sqrt{x})^2, \quad y = \ln(1-x^2), \quad y = \frac{x\ln(x-1)}{2\sin x-1}.$$

2.2.4 Composition de fonctions numériques

La composition a été définie dans le cadre plus général des applications mais elle s'applique bien sûr aux fonctions numériques. Rappelons que la composition $g \circ f$ de deux fonctions f et g existe si et seulement si l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble de départ de g, comme par exemple dans le cas suivant.

Exemple. La composée $g \circ f$ des deux fonctions numériques suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} g: \ ]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}\right.$$

est la fonction h :

$$\left\{\begin{array}{rcl} h: \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2+1) \end{array}\right. .$$

Ceci dit, on fera attention de ne pas confondre une fonction définie par une composition de fonctions comme dans l'exemple ci-dessus et une fonction définie par une expression faisant intervenir une composition. Donnons un exemple.

Exemple. Considérons les deux fonctions suivantes

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \ . \end{cases}$$

Ces fonctions ne sont évidemment pas composables car $4-x^2$ peut prendre des valeurs strictement négatives, mais elles permettent de définir une expression $y = g(f(x))$ et ainsi une fonction numérique associée à cette expession. Plus précicément l'expression $g(f(x))$ est définie dès lors que $f(x) \in \mathbb{R}^+$, ce qui a lieu pour $x \in [-2,2]$. La fonction h associée à l'expression $y = g(f(x))$ est donc :

$$\begin{cases} h: & [-2,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{4-x^2} \ . \end{cases}$$

Comme on l'a déjà dit, la fonction h *n'est pas* la composée des fonctions f et g. Par contre, la fonction h *et* la composée $h = g_1 \circ f_1$ des deux fonctions f_1 et g_1 suivantes :

$$\begin{cases} f_1: & [-2,2] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & 4-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \ . \end{cases}$$

Exercice. Pour les cas suivants, dire si la composition $g \circ f$ est possible. Si oui, expliciter cette composition. Si non, expliciter la fonction h associée à l'expression $y = g(f(x))$, puis exprimer h comme une composée $g_1 \circ f_1$.

1. $f :]1,+\infty[\to]0,+\infty[,\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, et $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + \ln x$.
2. $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2+1$, et $g :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{2-x}$.
3. $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 6x + 8$, et $g :\ \mathbb{R}_{|\{-2\}} \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$.

2.2.5 Sens de variation d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie sur un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ et soit I une partie de X. On rappelle que :

Définition (Fonction croissante). La fonction f est *croissante sur I* si f conserve l'ordre des images de deux réels quelconques de I. Cela se traduit par l'énoncé mathématique :

$$\forall\,(x,x') \in I^2, \quad x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x') \ .$$

La fonction f est *strictement croissante sur I* si elle vérifie la condition plus restrictive avec inégalité stricte

$$\forall\,(x,x') \in I^2 \quad x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x') \ .$$

En considérant l'inégalité inverse, on obtient la définition duale suivante.

Définition (Fonction décroissante). La fonction f est *décroissante sur I* si f inverse l'ordre des images de deux réels quelconques de I. Cela se traduit par l'énoncé mathématique :

$$\forall\,(x,x') \in I^2, \quad x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x') \ .$$

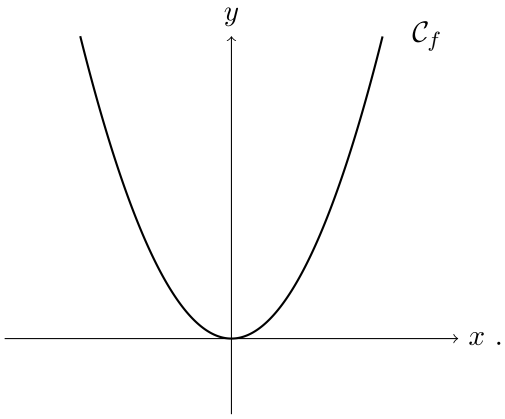
La fonction f est *strictement décroissante sur I* si elle vérifie la condition plus restrictive avec inégalité stricte

$$\forall\,(x, x') \in I^2 \quad x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')\ .$$

ATTENTION. La propriété d'être croissante ou décroissante **n'est pas intrinsèque à la fonction** (ni à l'expression), c'est-à-dire qu'elle **dépend en général de l'ensemble** I sur lequel on se pose la question. Pour bien vous en convaincre, considérer la fonction ≪ mise au carré ≫ suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2\ , \end{array} \right.$$

dont le graphe est la fameuse parabole



Cette fonction est donc (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et (strictement) croissante sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut rien dire : elle n'est ni croissante, ni décroissante.

Définition (Fonction monotone). On dit qu'une fonction f est *monotone sur I* si f ne change pas de sens de variation sur I, c'est-à-dire si f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I. De la même manière, on dit qu'une fonction f est *strictement monotone sur I* si elle est soit strictement croissante sur I ou soit strictement décroissante sur I.

On dit que deux fonctions ont le *même sens de variation sur I* si elles sont toutes les deux croissantes sur I, ou toutes les deux décroissantes sur I. Enfin on dit qu'elles ont des *sens opposés de variations sur I* si l'une est croissante sur I et l'autre décroissante sur I.

REMARQUES.

- ◇ Le fait que f soit croissante sur I peut encore se traduire de la façon suivante :

$$\forall\,(x, x') \in I^2, \quad x \neq x' \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \geq 0\ .$$

- ◇ **Dire qu'une fonction n'est pas croissante sur I ne veut pas dire qu'elle est décroissante sur I !** Autrement dit, toutes les fonctions ne sont pas monotones. Encore une fois, pour vous en convaincre pleinement, considérer la fonction ≪ mise au carré ≫ ci-dessus.

Proposition 4 (Composition de fonctions monotones). *Soient f et g deux fonctions numériques monotones respectivement sur I pour f et sur $J = f(I)$ pour g.*

◇ *Si les fonctions f et g ont le même sens de variation (sur I pour f et sur J pour g), alors la composée $g \circ f$ est croissante sur I.*
◇ *Si les fonctions f et g ont un sens de variation opposé (sur I pour f et sur J pour g), alors $g \circ f$ est décroissante sur I.*

On laisse au lecteur la démonstration (pas difficile) de ces affirmations ; il s'agit là d'un bon exercice.

On peut affiner cette proposition avec des fonctions strictement monotones et l'on aboutit alors à une compostion strictement croissante ou strictement décroissante suivant que f et g ont un sens de variation identique ou opposé.

EXERCICES.

1. Quelles sont les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := x^3$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$? Est-elle strictement croissante ?
3. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) := 1/x$ est elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?
4. La fonction partie entière de x, $E : x \mapsto E(x)$, est-elle monotone ? strictement monotone ?
5. Ecrire des énoncés avec des quantificateurs mathématiques signifiant que
   (a) f n'est pas croissante sur I,
   (b) f n'est pas strictement monotone sur I,
   (c) f n'est pas monotone sur I.
6. Rappeler le sens de variation des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto e^{-x}$ et $f : x \mapsto x^2$. Déterminer, sans aucun calcul mais avec précision, le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto e^{-x^2}$.

2.2.6 Opérations sur les fonctions numériques

Nous définissons dans cette section la somme $f + g$, le produit $f.g$ et le quotient f/g de deux fonctions numériques $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ définies sur un même ensemble de départ [4]. Pour cela, on considère la somme, le produit et le quotient des images.

Définition (Somme, produit, quotient de fonctions numériques). Soient deux fonctions numériques f_1 et f_2 définies sur un même ensemble de départ X et ayant pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

◇ La *somme* $f_1 + f_2$ des deux fonctions f_1 et f_2 est définie par

$$\begin{cases} f_1 + f_2 : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_1(x) + f_2(x) \ . \end{cases}$$

◇ Le *produit* $f_1.f_2$ des deux fonctions f_1 et f_2 est défini par

$$\begin{cases} f_1.f_2 : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_1(x).f_2(x) \ . \end{cases}$$

4. Un des premiers intérêts de ces opérations est qu'elles permettent des formulations simples d'énoncés sur les fonctions comme par exemple : ≪ la somme $f + g$ de deux fonctions définies et dérivable sur I est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$ ≫.

◇ Le *quotient* f_1/f_2 des deux fonctions f_1 et f_2 est défini par

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f_1/f_2 : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \end{array} \right. .$$

Exemple. Reprenons l'exemple de la fonction g définie au (2.5) :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} g : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2+\ln(x+1)}{\sin x+3} \end{array} \right. .$$

Nous pouvons construire la fonction g à l'aide d'opérations sur des fonctions numériques plus simples. Partons des trois fonctions suivantes ayant le même ensemble de départ que celui de g ; l'arrivée est toujours $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, & x \mapsto x^2 \ , \\ k : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, & x \mapsto \ln(x+1) \ , \\ l : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, & x \mapsto \sin x + 3 \ . \end{array}$$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $l(x) \neq 0$ et aussi

$$g(x) = \frac{h(x)+k(x)}{l(x)} \ .$$

Avec les définitions ci-dessus, on peut alors écrire :

$$g = \frac{h+k}{l} \ .$$

Remarque. Il faut être bien attentif sur le fait que ces opérations entre fonctions numériques ne sont définies **que pour des fonctions ayant même ensemble de départ et ayant $\mathbb{R}$ pour ensemble d'arrivée**. Il est souvent sous-entendu lorsque l'on parle d'une somme $h = f + g$ ou d'un produit $h = fg$ que les termes ou les facteurs f et g dont on parle à cette occasion sont des fonctions dont l'ensemble de départ est celui de la fonction h, même si ces dernières ont une expression qui est définie sur un ensemble plus grand.

Exercice. On considère les deux fonctions

$$f(x) := \frac{x^2}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) := \sqrt{1-x^2} \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition D de l'expression $y = f(x)g(x)$.
   Soit la fonction
   $$\left\{ \begin{array}{rccc} h : & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)g(x) \ . \end{array} \right.$$
   Définir h comme produit de deux fonctions que l'on explicitera. (Plusieurs choix sont possibles ...).

2. Déterminer le domaine de définition E de l'expression $y = f(x)/g(x)$.
   Soit la fonction
   $$\left\{ \begin{array}{rccc} k : & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)/g(x) \ . \end{array} \right.$$
   Définir k comme quotient de deux fonctions que l'on explicitera .

Exercice (Opérations et sens de variation).

1. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que les fonctions définies sur I, somme $f+g$ et produit fg sont croissantes sur I.
2. Soient maintenant f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. Montrer que la somme $f+g$ est toujours croissante sur I, mais que la fonction produit fg est décroissante sur I.
3. La somme de deux fonctions monotones est-elle toujours une fonction monotone ? Tracer pour $x \in [-2, 0]$ la courbe des fonctions $h : x \mapsto x + x^2$ et $k : x \mapsto x^2 + x^3$.

2.3 Continuité et théorème des valeurs intermédaires

2.3.1 Continuité

Intuitivement, une fonction numérique définie sur un intervalle est *continue* sur ce dernier si on peut en dessiner la courbe représentative sans lever le crayon. Ceci dit, la notion mathématique de continuité d'une fonction numérique est beaucoup plus fine qu'il n'y parait et a pour origine la notion de *limite* que nous ne développerons pas en détails ici. On donne la définition mathématique suivante.

Définition (Continuité). Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique, soient $a \in X$ et E un sous-ensemble de X. On dit que f est *continue en a* lorsqu'on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a) \ .$$

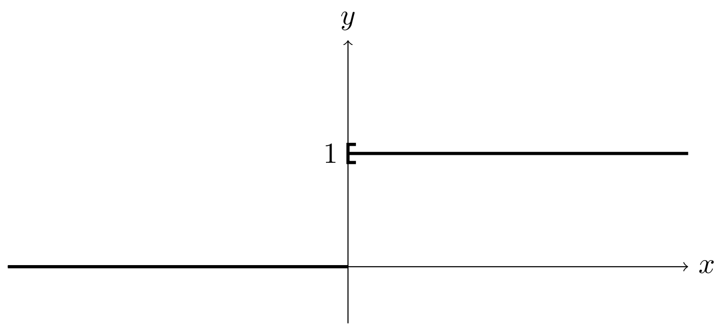
On dit que f est *continue sur E* lorsqu'elle est continue en tout point $a \in E$.

Exemples.

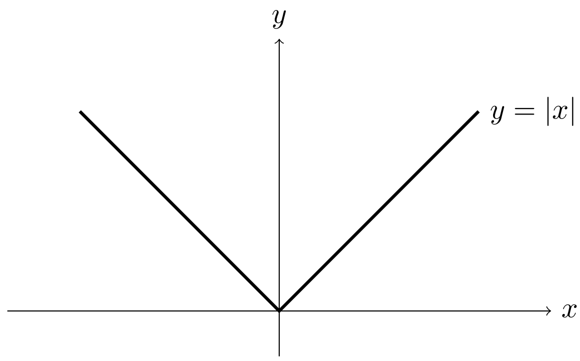
◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. Le ≪ saut ≫ en 0 est incompatible avec la continuité en ce point.



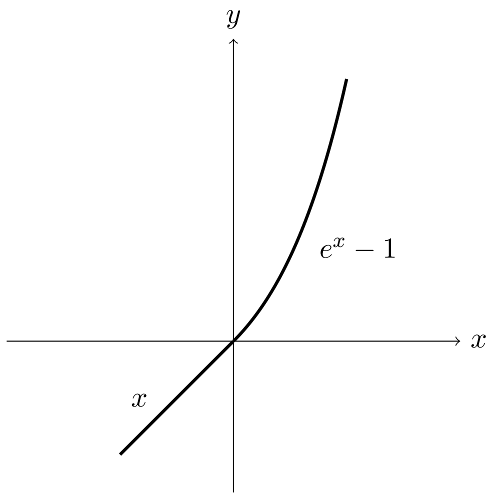
◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ est continue en 0.



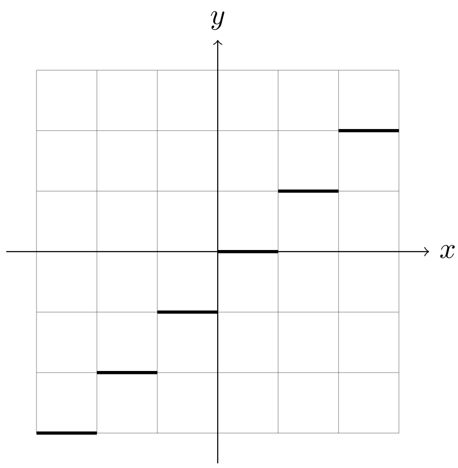
◇ La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

est continue en 0. Malgré la différence entre les deux formules qui définissent cette fonction, le « raccord » en 0 s'effectue de manière continue.



◇ La fonction partie entière $x \mapsto \mathrm{E}(x)$ est « discontinue, » c'est-à-dire non continue, sur tous les entiers relatifs $\mathbb{Z}$.



◇ Les fonctions : polynômiales, racine carré, fractions rationnelles, sin, cos, exp, ln, sont continues sur l'ensemble de définition de leur expression.

On est très souvent amené à faire des opérations sur les fonctions. La proposition suivante montre que la continuité est préservée par les opérations classiques. Nous admettrons cette propriété qui est une conséquence directe des propriétés des limites : limite d'une somme, d'un produit, etc.

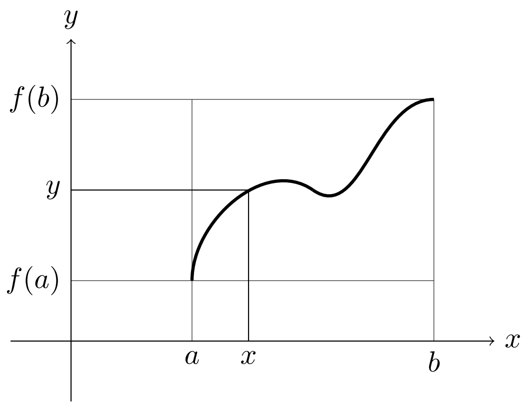
Proposition 5. *Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un même ensemble X, alors la somme $f+g$ et le produit fg sont des fonctions continues sur X. Si de plus, g ne s'annule pas sur X, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est également continu sur X.*

La continuité est aussi préservée par la composition.

Proposition 6. *Soit f une fonction continue sur I et soit g une fonction continue sur $J = f(I)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I.*

2.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Si, pour représenter une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on ne doit pas lever le crayon entre les points de sa courbe de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, il est intuitivement clair qu'alors toutes les ordonnées y comprises entre les deux nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont des ordonnées de points de la courbe et donc des images par f d'élements de $[a, b]$.



C'est l'objet du théorème important des valeurs intermédiares ci-dessous.

Théorème 8. (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$). Pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.*

Remarque. Bien qu'intuitif, ce résultat n'est pas trivial et a pour origine le fait fondamental que l'ensemble des nombres réeels $\mathbb{R}$ n'a pas de « trou»[5] , ce que l'on peut traduire par le fait que la limite d'une suite convergente de nombres réels est un nombre réel, propriété que l'on retrouve utilisée dans la démonstration ci-dessous.

5. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire des nombre de la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, ne permettent pas de mesurer toutes les longueurs existantes. Par exemple, la longueur $\sqrt{2}$ de la diagonale d'un carré de côté 1, ne peut se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel, le nombre 2 n'est donc pas le carré d'un nombre rationnel. Les grecs ont mis longtemps avant de l'accepter. Cela a mis en évidence l'existence d'un ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{Q}$, celui des nombres réels $\mathbb{R}$, dont les positifs permettent de mesurer toutes les longueurs existantes ...

Démonstration. — On peut supposer sans perte de généralité que $f(a) \leq f(b)$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. On va montrer que l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution. On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante. On pose $a_0 := a$ et $b_0 := b$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$a_{n+1} := a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{si} \quad f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq y$$

et on pose

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} := b_n \quad \text{si} \quad f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < y \ .$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la différence $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes et ont donc une limite commune x_0 appartenant à $[a, b]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, les suites $f(a_n)$ et $f(b_n)$ tendent vers $f(x_0)$. Par passage à la limite dans l'inégalité on obtient $f(x_0) \leq y \leq f(x_0)$ ce qui implique $f(x_0) = y$. □

Remarques.

- ⋄ Si l'on sait en plus que $f(a) \neq f(b)$ alors un nombre réel k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ aura donc au moins un antécédent x dans $]a, b[$.
- ⋄ La démonstration donne une méthode pratique de détermination d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = k$, dite *méthode de dichotomie.*

Le théorème des valeurs intermédiaires admet la formulation équivalente suivante.

Théorème 9. (Théorème de Weierstrass)
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, dès que c et d sont dans E et que m est compris entre c et d alors $m \in E$.
Montrons d'abord que Théorème (8) ⇒ Théorème (9). Soit f une fonction continue sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons que $f(I)$ est un intervalle.
Si s et t sont dans $f(I)$, alors $s = f(c)$ et $t = f(d)$ pour au moins deux éléments c et d de I. Si y est compris entre s et t, alors y est compris entre $f(c)$ et $f(d)$ et d'après le Théorème (8), il existe x compris entre c et d, donc dans I, tel que $f(x) = y$, c'est-à-dire $y \in f(I)$ et donc $f(I)$ est un intervalle.
Réciproquement, montrons à présent que Théorème (9) ⇒ Théorème (8). Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, son image $f([a, b])$ est donc un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$. Ainsi tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est dans l'image $f([a, b])$ puisque c'est un intervalle. Il existe donc $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. □

Exercices.

1. Soit f la fonction polynômiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := -2x^2 + 6x + 8 \ .$$

On note $\mathcal{C}_f$ la parabole représentant f dans repère orthomormé du plan.

(a) A l'aide de la courbe $\mathcal{C}_f$, déterminer $f(A)$, où $A = [-2, 4]$. Comparer avec l'intervalle $[f(-2), f(4)]$.

(b) Calculer $f(-2)$. Déterminer graphiquement l'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-12, 0]\} \ .$$

Retrouver par le calcul cet ensemble S.

2. Soit f la fonction polynômiale du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 12x + 7 \ .$$

(a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions (étudier la fonction f).

(b) Avec la méthode utilisée pour la démonstration du théorème (8), donner une approximation au dixième de celle qui est comprise entre les deux autres.

2.4 Dérivée d'une fonction

2.4.1 Points à l'intérieur d'un ensemble

Sauf mention du contraire les fonctions numériques $f : X \longrightarrow Y$ de cette section ont pour ensemble de départ un sous-ensemble quelconque X de $\mathbb{R}$. Pour poursuivre, il est à présent nécéssaire de distinguer les éléments, dits aussi points, de X dits *intérieurs à* X et ceux dits *du bord de* X.

Définition (Intérieur et bord).

◇ Un élément x_0 de X est à l'*intérieur* de X si x_0 est contenu dans un intervalle ouvert $]a, b[$ de X, soit en symboles mathématiques : $x_0 \in \,]a, b[\, \subset X$.

◇ Un élément x_0 de X est *au bord* de X si x_0 n'est pas à l'intérieur de X et si x_0 est l'extrémité d'un intervalle fermé non réduit à un point contenu dans X.

Exemple. Soit $X :=]-\infty, 3] \cup \{4\} \cup [5, 6[$, alors l'ensemble des éléments à l'intérieur de X est $]-\infty, 3[\, \cup \,]5, 6[$ et l'ensemble des éléments du bord de X est $\{3, 5\}$. (L'élément 4 n'est ni intérieur, ni sur le bord, il est « isolé » dans X).

2.4.2 Dérivabilité

Si la continuité représente une certaine forme de « régularité » des fonctions, la dérivabilité en est une version améliorée.

Définition (Dérivée en un point intérieur). Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique et soit x_0 un point intérieur à X. On dit que f est *dérivable au point* x_0 lorsque la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ ,$$

existe et est finie que l'on note alors $f'(x_0)$. On appelle ce nombre la *dérivée* de f au point x_0.

Remarque. On peut aussi poser $x = x_0 + h$, d'où $x - x_0 = h$, et on obtient pour l'expression de la dérivée la limite suivante.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in X}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \tag{2.7}$$

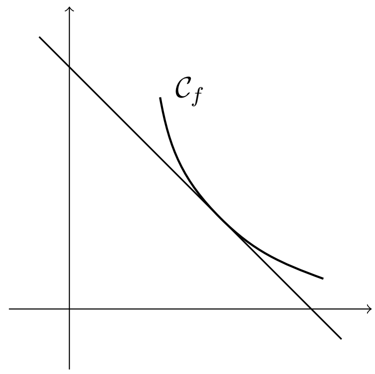
Exemples. On voit facilement qu'une fonction constante est dérivable en tout point, sa dérivée étant égale à 0. On vérifiera que les fonctions d'expression $y = 3x$ et $y = x^2$ sont dérivables en 0, et qu'en revanche la fonction d'expession $y = |x|$ ne l'est pas, le changement soudain de direction en 0 empêche la dérivabilité en 0.

Pour que le taux de variation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admette une limite finie en x_0, il faut que le numérateur tende vers 0. Une fonction dérivable au point x_0 est donc nécessairement continue au point a.

Proposition 7. *Tout fonction f dérivable en un point a est continue au point a.*

Attention. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ introduit plus haut.

Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit x_0 un point intérieur à X et soit $]a, b[$ un intervalle de X contenant x_0. Pour $x \in]a, b[$ et $x \neq x_0$, considérons la droite D_x passant par les 2 points de $\mathcal{C}_f$, $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. La pente de cette droite est égale au taux d'accroissement de f entre x_0 et x.
Si f est dérivable en x_0, alors quand x tend vers x_0, la pente de la droite D_x tend vers $f'(x_0)$. La droite « limite », passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$, est la *tangente* à la courbe de f en ce point.



Propriétés (Équation de la tangente). L'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction dérivable en x_0 est

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)} \; .$$

Pour les points x_0 du bord de X ou des points intérieurs particuliers de X, on ne peut qu'étudier la limite du taux de variation que d'un seul côté de x_0. Cela donne lieu à la définition suivante :

Définition (Dérivée à droite). Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique et x_0 un point du bord gauche de X ou intérieur à X. On dit que f est *dérivable à droite en x_0* lorsque la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note $f'_d(a)$ cette limite qu'on appelle la *dérivée à droite de f en x_0*.

La notion de *dérivée à gauche* est définie de manière similaire pour les points du bord droit de X ou intérieur à X.

Exemple. Bien que non dérivable en 0 comme nous l'avons vu précédemment, la fonction définie par $f(x) = |x|$ est pourtant dérivable à droite et à gauche en 0, avec $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Comme on le voit ici, le fait que f soit dérivable à droite et à gauche en un point n'entraîne pas la dérivabilité en ce point, on a néanmoins le résultat suivant.

Proposition 8. *Soit x_0 un point intérieur à X où f est continue. Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 avec*

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = l$$

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Cette propriété est souvent utile pour déterminer la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux, aux points de « jonction » des différentes définitions.

Exemple. Soit par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \ , \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x > 1 \ . \end{cases}$$

Au point 1, la fonction est continue, car elle tend vers 1 des deux côtés, mais elle admet aussi une dérivée à gauche, et une dérivée à droite, toutes les deux égales à 1. Donc la fonction f est donc dérivable au point 1, avec $f'(1) = 1$.

En revanche la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \ , \\ x^2 & \text{si } x > 1 \ . \end{cases}$$

est continue au point 1, mais non dérivable, car sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche n'ont pas la même valeur. On dit dans ce cas que le graphe de g possède un *point anguleux* avec deux *demi-tangentes* de pente 1 (à gauche) et 2 (à droite).

Attention. Pour pouvoir appliquer la proposition précédente, **il faut bien vérifier que la fonction est continue au point sinon le résultat est faux**.

2.4.3 Dérivabilité et opérations sur les fonctions

L'objet de ce paragraphe est d'établir les principaux résultats relatifs à la compatibilité de la dérivabilité avec les opérations définies sur les fonctions. Il est cependant nécessaire de débuter avec le résultat « technique » suivant.

Proposition 9. *Une fonction $f : X \to Y$ est dérivable en x_0, de nombre dérivé l en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : h \to \varepsilon(h)$, définie sur un voisage de 0, tendant vers 0 pour $h \to 0$, telle que $\varepsilon(0) = 0$ et*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,(l + \varepsilon(h))\,. \tag{2.8}$$

DÉMONSTRATION. — Si f est dérivable en x_0, considérons la formule, vue plus haut,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Posons alors, pour $h \neq 0$,

$$\varepsilon(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

On peut alors prolonger la fonction ε en 0, en posant $\varepsilon(0) = 0$. Cette fonction remplit alors les conditions de la proposition.
Réciproquement, en utilisant (2.8), on voit que la limite du taux d'accroissement en x_0 existe, est finie et vaut l ainsi la fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. □

Proposition 10. *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0, soit α un nombre réel, les fonctions αf, $f+g$, fg et f/g (si $g(x_0) \neq 0$) sont dérivables en x_0 et leurs dérivées respectives valent*

$$\begin{array}{rcl} (\alpha f)'(x_0) & = & \alpha \cdot f'(x_0) \ , \\ (f+g)'(x_0) & = & f'(x_0) + g'(x_0) \ , \\ (fg)'(x_0) & = & f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \ , \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) & = & \dfrac{g(x_0) f'(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ . \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Ces formules ont été vues dans l'enseignement secondaire. Montrons par exemple celle qui donne la dérivée d'un produit, en nous servant de la proposition 9. Appliquons la formule (2.8) aux fonctions f et g : il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\left(f'(x_0) + \varepsilon_1(h)\right) \quad \text{et} \quad g(x_0+h) = g(x_0) + h\left(g'(x_0) + \varepsilon_2(h)\right) \ .$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} f(x_0+h)\, g(x_0+h) =& f(x_0)\, g(x_0) + h\Big[f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \\ & + f(x_0)\, \varepsilon_2(h) + g(x_0)\, \varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h))\Big]. \end{aligned}$$

En posant

$$\varepsilon_3(h) := f(x_0)\, \varepsilon_2(h) + g(x_0)\, \varepsilon_1(h) + h\,(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\,(g'(x_0) + \varepsilon_2(h)) \ ,$$

cela s'écrit encore

$$f(x_0+h)\, g(x_0+h) = f(x_0)\, g(x_0) + h\left[f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) + \varepsilon_3(h)\right] \ .$$

On constate alors que $\varepsilon_3(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Toujours d'après la proposition 9, cela montre que $f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$ est bien la dérivée de fg en x_0. □

2.4.4 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 11. *Si $f : X \to Y$ est une fonction dérivable au point x_0, et si la fonction $g : Y \to Z$ est dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0. Sa dérivée est alors donnée par*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)).}$$

DÉMONSTRATION. — On utilise encore la proposition 9. Il existe donc des fonctions $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$, tendant vers 0 quand $h \to 0$, telles que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\left(f'(x_0) + \varepsilon_1(h)\right) \tag{2.9}$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + k\left(g'(y_0) + \varepsilon_2(k)\right) \tag{2.10}$$

en posant $y_0 = f(x_0)$. Alors

$$g(f(x_0 + h)) = g\left[y_0 + h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\right],$$

soit, en posant $k = h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))$ dans la formule (2.10) ci-dessus,

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) = g(y_0 + k) &= g(y_0) + k(g'(y_0) + \varepsilon_2(k) \\ &= g(y_0) + h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))[g'(y_0) + \varepsilon_2(h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))], \end{aligned}$$

ou encore

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + h[f'(x_0)g'(f(x_0)) + \varepsilon_3(h)],$$

où $\varepsilon_3(h)$ est une fonction, qu'on laisse au lecteur le soin de décrir précisément, qui tend vers 0 quand $h \to 0$. En appliquant une nouvelle fois la proposition 9, on obtient la conclusion cherchée. □

EXEMPLE. Rappelons, mais cela sera démontré dans le chapitre suivant, que les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ ont respectivement pour dérivée en un point x, $f'(x) = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $g'(x) = 1/x$, pour tout $x > 0$.
Soit $u : x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable en x_0, alors la fonction définie par $v(x) := e^{u(x)}$ l'est également et sa dérivée en ce point est

$$v'(x_0) = u'(x_0)\, e^{u(x_0)}\ .$$

Si de plus $u(x_0) > 0$ alors la fonction définie par $w(x) := \ln(u(x))$ est dérivable en x_0 e sa dérivée vaut

$$w'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}\ .$$

2.4.5 Fonction dérivée

Définition (Domaine de dérivabilité). On appelle *domaine de dérivabilité* d'une fonction $f : X \to Y$ l'ensemble des points où elle est dérivable. On le note D'_f.

Définition (Fonction dérivé). On appelle fonction dérivée de f la fonction définie par

$$\begin{cases} f' : & D'_f \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f'(x)\ . \end{cases}$$

EXEMPLE. Pour la fonction définie par $f(x) = |x|$, le domaine dérivabilité est $D'_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$. Pour la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$, alors $D'_f = \mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

VOCABULAIRE. Soit une fonction $f : X \to Y$ et $]a,b[$ un intervalle ouvert contenu dans X. On dit que la fonction f est *dérivable sur* l'ouvert $]a,b[$ si $]a,b[$ est contenu dans le domaine de dérivabilité D'_f de f. Si le fermé $[a,b]$ est contenu dans X, on dit que f est dérivable sur le fermé $[a,b]$ si f est dérivable sur $]a,b[$, est dérivable à droite en a et est dérivable à gauche en b.

Définition (**Dérivées successives**)**.** La fonction f' elle-même peut être dérivable en certains points : la dérivée de f', quand elle existe, est appelée *dérivée seconde* de f et elle est notée f''. La fonction f'' elle-même peut être dérivable, sa dérivée est appelée *dérivée troisième* de f et notée f'''.
On définit ainsi par récurrence la notion de *dérivée n-ième*, ou de *dérivée d'ordre* n, de f, notée $f^{(n)}$. On dit que f est dérivable n fois (en un point, sur un intervalle, etc.) si au(x) point(s) concerné(s) les dérivées $f^{(k)}$ existent pour $k = 1, \ldots, n$. Pour la cohérence de la notation, on convient que $f^{(0)} := f$.

EXERCICES.

1. Calculer la dérivée n-ième de la fonction f définie par $h(x) := \ln(x+1)$.

2. Calculer la dérivée n-ième de la fonction g définie par $k(x) := \sin x$.

3. Soient deux fonctions f et g dont on suppose que le produit fg est défini et telles que f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n. Montrer que la dérivée d'ordre n du produit fg existe, sa valeur étant donnée par la formule suivante (*formule de Leibniz*) :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}} .$$

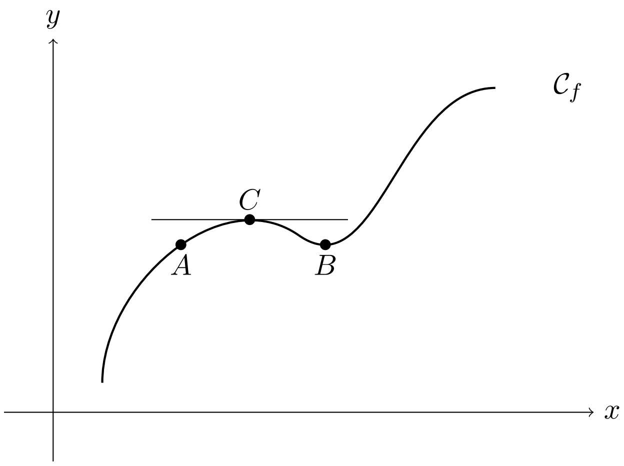
(On pourra procéder par récurrence sur n).

2.4.6 Théorème des Accroissements finis

Nous admettrons le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème des accroissements finis énoncé ensuite.

Théorème 10 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ contenu dans X, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE. Ce théorème peut s'interpréter graphiquement sur la courbe représentant une fonction dérivable : si deux points distincts A et B de la courbe ont même ordonnée, il existe entre A et B un point C de cette courbe dont la tangente est horizontale.



Notons que dans ce cas la tangente en C est parallèle à la "corde" $[A, B]$. Cette propriété n'est pas réservée à la direction horizontale, comme le montre le théorème des accroissements finis.

Théorème 11 (**Théorème des accroissements finis**). *Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ contenu dans X, et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)$ soit égal au taux d'accroissement de f entre a et b :*

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \ .$$

Interprétation graphique. Ce théorème peut s'interpréter graphiquement sur la courbe représentant une fonction dérivable : pour deux points distincts A et B de cette courbe, il existe entre ces deux points un point C de la courbe dont la tangente est parallèle à la corde $[A, B]$.

Démonstration. — Considérons les deux points situés sur la courbe de f : $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Soit $\varphi(x)$ la fonction qui donne l'écart vertical entre la courbe de f et la corde $[AB]$ aux points d'abscisse x. Cette fonction s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

On vérifie que la fonction φ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle entre a et b : elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et elle s'annule en a et b. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ,$$

donc $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

L'inégalité suivante que l'on déduit aisément de l'égalité des accroissements finis est fort utile. La preuve est laissée à titre d'exercice.

Théorème 12 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I et soit $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$ on ait*

$$|f'(t)| \leq M \ .$$

Alors pour tous $x, y \in I$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \ .$$

Exemple. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, la fonction cosinus, vérifie $|\cos t| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \cdot |x - 0|$, c'est-à-dire $|\sin x| \leq |x|$.

2.5 Utilisation de la dérivée pour l'étude des fonctions

La dérivée, quand elle est disponible, offre un outil irremplaçable pour l'étude des fonctions. Commençons par donner un résultat très utile pour l'étude du comportement d'une fonction $f : X \to Y$ aux points du bord de X.

2.5.1 Limite de nombres dérivés et demi-tangente

Proposition 12 (**Limite de nombres dérivés, demi-tangente**)**.** *Soit $f : X \to Y$ une fonction numérique continue sur un intervalle $[x_0, b]$ contenu dans X et dérivable sur $]x_0, b[$. Si $f'(x)$ tend vers une limite à droite δ quand $x \underset{>}{\to} x_0$ alors f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ .*

Démonstration - Exercice. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$, montrer que f admet en x_0 une dérivée à droite égale à δ.

On a bien entendu un énoncé similaire si l'on considère un intervalle de la forme $[a, x_0]$ et la limite de $f'(x)$ à gauche en x_0. Cette proposition est très utilisée en pratique en particulier pour étudier les pentes des demi-tangentes aux extrémités. En voici deux exemples.

Exercices.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) := \ln(x) + 1$ si $x \in]0, 1[$ et par $f(x) := \exp(x - 1)$ si $x \geq 1$. Cette fonction est-elle continue en 1 ? dérivable en 1 ?
2. Représenter graphiquement au voisinage de 0^+, la fonction $g(x) := \cos(\sqrt{x})$.

2.5.2 Extrema

Passons à présent à l'utilisation de la dérivée pour des points intérieurs à X et commençons par le cas des extrema dits locaux.

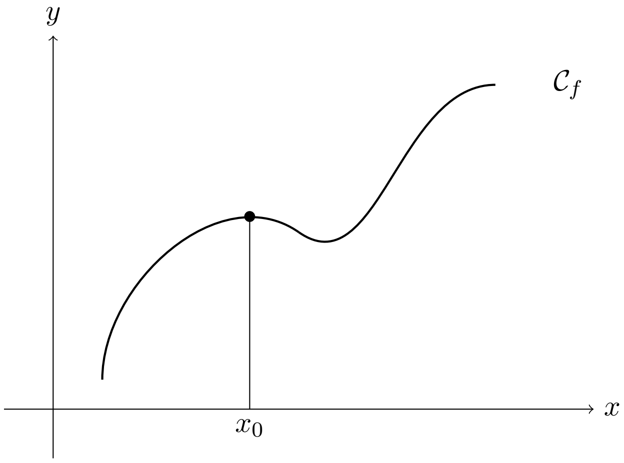
Définition (**Extremum local**)**.** Soient $f : X \to Y$ une fonction numérique, et x_0 un point intérieur à X. On dit que f admet en x_0 un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) si, pour un certain intervalle $I =]a, b[$ contenu dans X et contenant x_0, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{respectivement } \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)) \ .$$

Dans chacun des deux cas on dit que le point x_0 est un *extremum local* pour f. Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes pour $x \neq x_0$, on obtient les notions de extremun local *strict*.

ATTENTION. On ne parle d'extremum local en x_0 **que si x_0 est à l'intérieur de X**. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) =: \sqrt{x}$, atteint sa valeur minimale en 0, on ne dit pas pour autant que 0 est un minimum local pour f.

REMARQUE. La définition, par exemple, d'un maximum local implique que $f(x_0)$ est le maximum des valeurs prises par f *sur l'intervalle I considéré*, mais pas forcément le maximum de *toutes* les valeurs prises par f. La fonction définie par $f(x) = x^3 - x$ possède en $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ un maximum local, alors que f prend parailleurs des valeurs bien plus grandes que $f(x_0)$ puisque $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Voir aussi l'exemple graphique suivant d'un maximum local mais non global.



Proposition 13. *Si x_0 est un extremum local de f et si f est dérivable en x_0, alors*

$$f'(x_0) = 0 \ .$$

DÉMONSTRATION. — Traitons le cas d'un maximum local. D'après les hypothèses, il existe un intervalle tel que f soit définie sur $]a, b[$ contenu dans X et contenant x_0, tel que

$$\forall x \in \,]a, b[\quad f(x) \leq f(x_0).$$

Il en résulte que si $x \in]a, x_0[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positif ou nul, donc sa limite quand $x \underset{<}{\to} x_0$ est positive ou nulle, d'où

$$f'_g(x_0) \geq 0 \ .$$

D'autre part si $x \in]x_0, b[$, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est négatif ou nul, donc sa limite quand $x \underset{>}{\to} x_0$ est négative ou nulle, d'où

$$f'_d(x_0) \leq 0 \ .$$

Mais comme f est dérivable en x_0, on a $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ et cette valeur ne peut qu'être égale à 0. Le cas d'un minimum local se traite de façon similaire ; on peut aussi considére la fonction $-f$. □

Remarques.

1. **La réciproque est fausse**, c'est-à-dire qu'une fonction peut posséder une dérivée nulle en un point sans présenter d'extremum local. Penser à l'exemple déjà évoqué de la fonction $f(x) = x^3$ en 0.
2. **La proposition est évidemment fausse si f n'est pas dérivable en x_0** : ainsi la fonction définie par $f(x) = |x|$ admet un minimum local en 0, mais sa dérivée ne s'annule pas en 0 puisque en ce point la fonction n'est pas dérivable !

2.5.3 Étude des variations

Donnons à présent le résultat principal et fondamental sur l'utilisation de la fonction dérivée pour l'étude d'une fonction (dérivable).

Théorème 13. *Soit $f : X \to Y$ une fonction continue sur un intervalle I contenu dans X et d'extrémités a et b, $a < b$ (a ou b pouvant être égal à $+\infty$ ou $-\infty$) et dérivable sur $]a, b[$.*

- ◇ *Si la fonction dérivée f' est positive (resp. négative) sur $]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*
- ◇ *Si la fonction dérivée f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.*

Démonstration. — Soient x et y dans I vérifiant $x < y$, on peut appliquer le théorème des accroissementsfinis sur l'intervalle $[x, y]$ pour obtenir l'existence d'un point $c \in]x, y[$, tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Ainsi, si $f'(c) \geq 0$, alors $f(y) \geq f(x)$. Bien sûr si $f'(c) > 0$, alors $f(y) > f(x)$. Le cas décroissant se traite de la même manière. □

Remarque. Le théorème est valable quelle que soit la nature de l'intervalle (ouvert, fermé, semi-ouvert...). Mais, **on fera très attention au fait que ce théorème n'est valable que sur un intervalle**, comme le montre l'exemple classique suivant. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée $f(x) = -1/x^2$ qui est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'est pourtant pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque. Il n'est pas nécessaire que la fonction dérivée f' soit strictement positive sur $]a, b[$, pour que f soit strictement croissante sur $[a, b]$, il suffit par exemple que f' soit strictement positive sur $]a, b[$ *sauf peut-être en un nombre fini de points* comme on peut le voir par exemple avec la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Cette fonction est strictement croissante bien que $f'(0) = 0$. En effet, il suffit ici d'appliquer le théorème précédent sur l'intervalle $[-1, 0]$ puis sur l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, on obtient la stricte croissance sur ces deux intervalles mais on obtient également que si $x < 0$, alors $f(x) < f(0)$ et que si $y > 0$, alors $f(0) < f(y)$, on peut donc conclure que f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ tout entier.

Corollaire 14. *Si la fonction $f : X \to Y$ est dérivable sur un intervalle ouvert I contenu dans X et de dérivée nulle sur I, alors f est constante sur cet intervalle.*

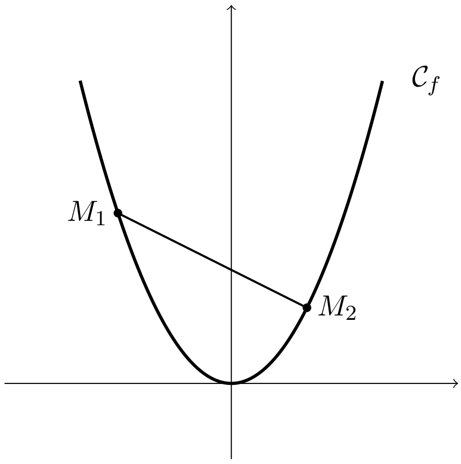
Démonstration. — On utilise le théorème précédent et on en déduit que notre fonction est à la fois croissante et décroissante, c'est-à-dire constante. □

Attention. On fera encore attention au fait que **ce résultat n'est valable que sur un intervalle**, comme le montre l'exemple suivant : la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $]0, +\infty[$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de dérivée nulle. Cette fonction n'est pourtant pas constante puisqu'elle prend deux valeurs !

2.5.4 Convexité et dérivée seconde

Définition (Fonction convexe sur un intervalle). Soit un intervalle $[a, b] \subset E \subset \mathbb{R}$ et soit une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur E. On dit que la fonction f est *convexe sur* $[a, b]$ si pour tout couple (M_1, M_2) de points de la courbe représentant f d'abscisses dans $[a, b]$, la corde $[M_1, M_2]$ est située au dessus de la courbe, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ \ \forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2, \quad f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leqslant f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))\ .}$$



Définition (Fonction concave sur un intervalle). De même, on dit que f est *concave sur* $[a, b]$ si pour tout couple (M_1, M_2) de points de la courbe de f d'abscisses dans $[a, b]$, la corde $[M_1, M_2]$ est située au-dessous de la courbe.

ATTENTION. La propriété d'être convexe ou concave **n'est pas intrinsèque à la fonction**, c'est-à-dire qu'elle **dépend en général de l'intervalle** $[a, b]$ sur lequel on se pose la question.

Tout comme le signe de la dérivée f' donne des indications sur le sens de variation d'une fonction dérivable f, le signe de la dérivée seconde $f'' = (f')'$ si elle existe, nous renseigne sur la convexité de f.

Théorème 14. *Si une fonction f admet une dérivée seconde f'' partout positive ou nulle sur un intervalle $[a, b]$, alors f est convexe sur $[a, b]$.*

DÉMONSTRATION. — Soient x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 et soit $y = mx + p$ l'équation de la droite $(M_1 M_2)$. La quantité $\varphi(x) = f(x) - (mx + p)$ mesurant la différence des ordonnées d'un point de la courbe et d'un point de la droite de même abscisse x, vérifie :

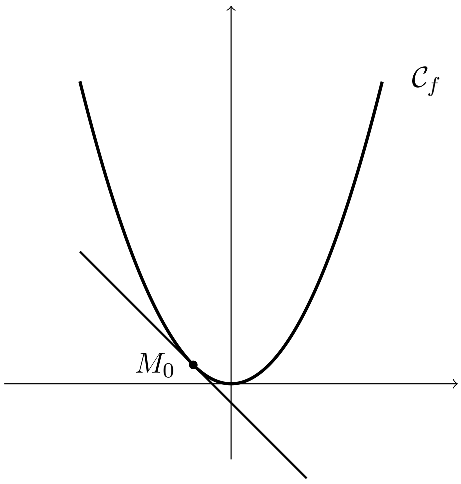
$$\varphi'(x) = f'(x) - m \text{ donc } \varphi''(x) = f''(x) \geq 0.$$

La fonction φ' est donc croissante sur $[a, b]$. D'autre part puisque $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $\varphi'(c) = 0$ par le théorème de Rolle. Ainsi $\varphi'(x) \leqslant 0$ pour $x \in [x_1, c]$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [c, x_2]$, et donc φ est décroissante sur $[x_1, c]$ et croissante sur $[c, x_2]$.

x	x_1		c		x_2
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Finalement $\varphi(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, ce qui signifie bien que la corde $[M_1, M_2]$ est située au-dessus de la courbe. $\square$

Théorème 15. *Si f admet une dérivée seconde f'' partout positive ou nulle sur $[a, b]$, alors pour tout $x_0 \in [a, b]$, la courbe représentative de f est, sur l'intervalle $[a, b]$, au dessus de la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$.*



Démonstration. — Soit $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ l'équation de la tangente en M_0 et $h(x) = f(x) - t(x)$ la fonction mesurant la différence des ordonnées entre un point de la courbe et un point de cette tangente, de même abscisse x. On a pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{et} \quad h''(x) = f''(x) \geq 0 \ .$$

Par conséquent, la fonction h' est croissante sur l'intervalle $[a, b]$, et comme $h'(x_0) = 0$, on a $h'(x) < 0$, pour $x < x_0$, et $h'(x) > 0$, pour $x > x_0$. La fonction h est décroissante sur $[a, x_0]$, et croissante sur $[x_0, b]$; elle admet donc son minimum en x_0, et comme $h(x_0) = 0$, on a $h(x) \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$. $\square$

Remarque. En considérant des dérivées secondes négatives, on obtient des résultats analogues aux théorèmes 14 et 15 mais en termes de concavité.

Exercice. Illustrer graphiquement et montrer les résultats suivants.

1. Pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.
2. Pour tout x réel, on a $e^x \geq 1 + x$.
3. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a $\ln x \leq x - 1$.

2.6 Exercices sur les fonctions numériques

Exercice 20. Pour chacune des fonctions f suivantes déterminer : l'image de f, $f(A)$ et l'ensemble des antécedants de B pour $A =]-1,3]$ et $B = [-2,4[$.

- ◇ f définie par $f(x) := 1 - 2x$,
- ◇ h définie par $h(x) := -x^2 + 6x - 5$,
- ◇ g définie par $g(x) := \sqrt[3]{x} - 1$,
- ◇ h définie par $k(x) := \ln(x+1)$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x$ pour $|x| \geq 1$, $f(x) := -x$ pour $|x| < 1$. Dessiner la courbe de f et calculer la composée $f \circ f$.

Exercice 22. Tracer la courbe de la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \dfrac{1}{x}$.
En déduire le tracé des courbes des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{x} \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+2} \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} - 1 \end{array},$$

puis des fonctions :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{-x+2} \end{array}, \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x} - 1 \end{array}.$$

Exercice 23. On considère l'expression polynômiale du second degré $P(x) := -x^2+2x+1$.

1. Mettre $P(x)$ sous forme canonique $\pm(x-\alpha)(x-\beta)$.
2. Donner les racines de l'équation $P(x) = 0$.
3. Tracer le graphe de la fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie, puis celui de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) := |P(x)|$.

Exercice 24. Dans un même repère othonormé du plan, donner les représentations graphiques des fonctions $[0,4] \to \mathbb{R}$ suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{4}E(4x)}\ .$$

Exercice 25. Donner le domaine de définition des expressions suivantes :

$$f(x) := \sqrt{x+1}\ , \quad g(x) := \ln(1-2x^2) \quad \text{et} \quad h(x) := \frac{x+1}{x^3-2x}\ .$$

Exercice 26.

1. Déterminer le domaine de définition D de l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{3t^2+t-1}}$.

   On définie ainsi une fonction $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $h(t) := \dfrac{1}{\sqrt{3t^2+t-1}}$.
2. Écrire la fonction h comme la composée de deux fonctions u et v. Donner plusieurs réponses possibles. Écrire à chaque fois u ou v comme la composée de deux autres fonctions.

Exercice 27. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Calculer la composé $f \circ f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et simplifier au maximum l'expression obtenue.
3. Transformer l'expression $f(x)$ en une expression égale où x n'apparaît qu'une fois.

Exercice 28. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\exp(x)}$$

est impaire et croissante.

Exercice 29. Déterminer, sans utiliser la dérivation, le sens de variation des fonctions suivantes :

$$g_1 : \begin{array}{ccc} [-3/2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2x+3} \end{array}, \quad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+2} \end{array}, \quad g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} .$$

Exercice 30. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \dfrac{x}{1+|x|}$.
Etudier le sens de variation de f (sans utiliser la dérivation).
INDICATION : on pourra d'abord transformer l'expression $f(x)$, en distinguant les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

Exercice 31. On considère les expressions numériques réelles

$$f(x) := \sin x \quad \text{et} \quad g(x) := \sqrt{1-x} \ .$$

1. Donner le domaine de définition de f et de g, et leurs images respectives.
2. Expliciter les fonction h et k définies par les expressions

$$h(x) := f(g(x)) \quad \text{et} \quad k(x) = g(f(x)) \ .$$

3. Donner l'image de h et l'image de k.

Exercice 32.

1. Déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x) := \dfrac{x}{1+x}$.
2. Déterminer ensuite, sans calculs supplémentaires, le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$ de la fonction g définie par $g(x) := \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Exercice 33. Etudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction $f_1(x) := x^2 \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f_1(0) = 0$.
2. La fonction $f_2(x) := \sin x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f_2(0) = 0$.
3. La fonction $f_3(x) := xE(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Exercice 34. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \ , \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Exercice 35. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \ , \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

1. Calculer $f(x_n)$ pour $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, puis pour $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 36. Soit f une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ qui vérifie, pour tous $x \neq x'$,

$$\left|f(x) - f(x')\right| < \left|x - x'\right| .$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$.
   Indication : On pourra étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et on pensera à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

1. Montrer que f s'annule au moins une fois.
2. Appliquer ce résultat aux polynômes de degré impair.

Exercice 38. Soit f la fonction numérique définie sur $[0,1] \cup]2,+\infty[$ par

$$f(x) := \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \ , \\ \dfrac{1}{2} + \ln x & \text{pour } x > 2 \ . \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation du segment de droite prolongeant f en une fonction continue g sur $[0,+\infty[$. Plus précisemment, chercher les valeurs des quantités a et b telles que la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ coïncidant avec f sur$[0,1] \cup]2,+\infty[$ et valant $g(x) = ax + b$ pour $x \in]1,2]$ soit continue sur son ensemble de départ.
2. Calculer les dérivées à droite et à gauche de g en $x = 1$ et $x = 2$. La fonction est-elle dérivable en ces points ?

Exercice 39. Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) := (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Est-elle dérivable à droite en -1 ? Est-elle dérivable à gauche en 1 ?
2. Est-elle dérivable sur $]-1,1[$?
3. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 40.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) := x^2 \sin \frac{1}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Montrer ensuite que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 41. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$, montrer à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} < \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Exercice 42. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x(e - 1) .$$

Exercice 43 (Ecart entre la courbe et la corde).

1. Soit $f : X \to Y$ une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$. On suppose que f s'annule en a, en b, et en un point $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f''(d) = 0$.
2. Soit $\varphi : X \to Y$ une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$, telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. On suppose que $|\varphi''(x)|$ est majoré sur $]a, b[$ par une constante $M > 0$.
   (a) Soit x_0 un point donné de $]a, b[$. On note $\pi(x) = C(x - a)(x - b)$. Montrer qu'on peut choisir C de façon que $\pi(x_0) = \varphi(x_0)$.
   La constante C étant ainsi choisie, montrer que la dérivée seconde de la fonction définie sur $]a, b[$ par $x \mapsto \pi(x) - \varphi(x)$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$. En déduire que
   $$|\varphi(x_0)| \leq \frac{M}{2}(x_0 - a)(b - x_0) .$$
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in [a, b] , \quad |\varphi(x)| \leq \frac{M}{8}(b - a)^2 .$$
3. Soit maintenant $f : X \to Y$ deux fois dérivable sur $[a, b]$ et telle que $|f''(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$.
   On considère les points $A := (a, f(a))$ et $B := (b, f(b))$. Soit $\varphi(x)$ l'écart vertical entre le graphe de f et la corde AB, aux points d'abscisse x. Montrer que
   $$\forall x \in [a, b] , \quad |\varphi(x)| \leq \frac{M}{8}(b - a)^2 .$$
4. Exemple numérique : soit la fonction f définie par $f(x) := \ln x$. Majorer l'écart vertical entre le graphe de f et la corde joignant les points du graphe d'abscisses 10 et 11.

Chapitre 3

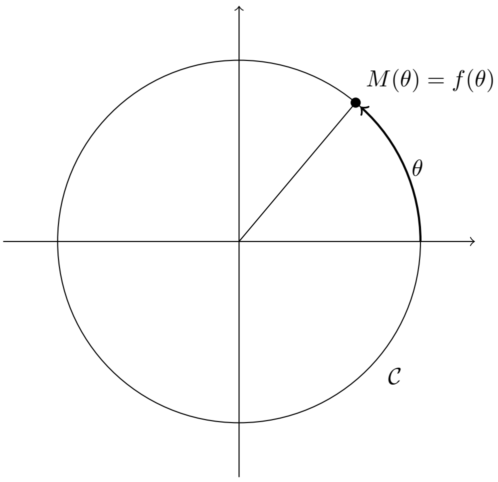
Les premières fonctions de référence

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés les fonctions de référence que sont les *fonctions trigonométriques* (cosinus, sinus, tangente), les *fonctions logarithmes* et les *fonctions exponentielles*.

3.1 Les fonctions trigonométriques

3.1.1 Rappel des définitions des fonctions cosinus, sinus et tangente

On rappelle les définitions des fonctions cosinus, sinus et tangente vues au chapitre 1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to P$ qui à un nombre réel θ associe le point $M(\theta)$ intersection du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ avec la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ en radian.



Définition (Fonctions cosinus et sinus).

- Le *cosinus* du nombre réel θ est l'abscisse du point $M(\theta)$; on le note $\cos\theta$.
- Le *sinus* du nombre réel de θ est l'ordonnée du point $M(\theta)$; on le note $\sin\theta$.
- La *tangente* du nombre réel de θ est la pente de la droite $(OM(\theta))$; on la note $\tan\theta$.

De façon plus formalisée, on peut considérer les applications « coordonnées » définies au chapitre 2 en 2.3 :

$$\left\{\begin{array}{llll} p_1 : & P & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{llll} p_2 : & P & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y \ . \end{array}\right.$$

Alors, on a pour tout nombre réel θ :

$$\cos\theta = p_1(M(\theta)) \quad \text{et} \quad \sin\theta = p_2(M(\theta)) \ ,$$

c'est-à-dire que la fonction cosinus est la composée de la fonction f avec la projection p_1 et que la fonction sinus est la composée de la fonction f avec la projection p_2.

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x \quad \text{et} \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{llll} \cos = p_1 \circ f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{llll} \sin = p_2 \circ f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x \ . \end{array}\right.}$$

Au final, la fonction tangente est la fonction suivante :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \tan : & \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \ . \end{array}}$$

Si on note par $T(\theta)$ le point d'intersection de la droite $(OM(\theta))$ avec l'axe des tangentes, on définit ainsi une fonction $T : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to P$. La fonction tangente est alors égale à la composée $p_2 \circ T$:

$$p_2(T(\theta)) = \tan\theta \ .$$

3.1.2 Continuité et dérivabilité

Proposition 15 (**Continuité**). *Les fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente sont continues.*

Démonstration. — Les fonctions trigonométriques sont des composées de fonctions continues. □

Proposition 16. *Les fonctions numériques* sin *et* cos *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; la fonction* tan *est dérivable en tout point de son domaine de définition* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$*. Les fonctions dérivées sont données par les formules suivantes :*

$$\boxed{\begin{array}{l} (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \ , \\ (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \ , \\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \ . \end{array}}$$

Démonstration. —(*sous forme d'exercice*)
On montre d'abord que l'expression

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

tend vers 1 quand x tend vers 0. Cela nous permettra de conclure que la fonction sinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 1.

1. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On note $S(x)$ l'ensemble des points du secteur angulaire $([OM(0)), [OM(x)))$ intérieurs au cercle trigronométrique. Dessiner $S(x)$. Quelle est l'aire $A(x)$ de $S(x)$ sachant qu'elle est proportionnelle à x ?
2. En comparant l'aire du triangle de sommets O, $M(0)$ et $M(x)$ avec $A(x)$, montrer que $\sin x \leq x$.
3. En comparant l'aire du triangle de sommets O, $T(0)$ et $T(x)$ avec $A(x)$, montrer que l'on a $x \leq \tan x$.
4. Montrer alors que
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

On montre ensuite que l'expression $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, Cela nous permettra de conclure que que la fonction cosinus est dérivable en zéro de nombre dérivé 0.

1. Montrer que pour tout réel x non nul, $\dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{x}{2} \dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}$
2. En déduire la limite cherchée.

Enfin, de la formule d'addition du sinus, on déduit que pour tous réels a et h on a

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = -\sin a \, \frac{1 - \cos h}{h} + \cos a \, \frac{\sin h}{h} \ .$$

On voit alors que, pour a fixé, quand $h \to 0$ le premier terme de la somme tend vers 0, et que le second terme tend vers $\cos a$. Donc la fonction sin admet en a une dérivée égale à $\cos a$.

Pour la fonction cosinus, on utilise la formule $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ que l'on dérive des deux côtés. Enfin, pour la fonction tangente, on en déduit sa dérivée des règles de dérivation d'un quotient de fonctions. □

3.1.3 Représentations graphiques

Comme les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, leurs courbes représentatives sont invariantes par une translation de vecteur $(2\pi, 0)$. Il suffit donc de les connaître pour des valeurs dans un intervalle de longueur 2π, par exemple sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Par ailleurs, la fonction cosinus est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction sinus est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Ces propriétés de périodicité et de parité nous permettent au final d'obtenir les courbes représentatives en ne connaissant les fonctions cosinus et sinus seulement pour les valeurs se situant dans $[0, \pi]$.

Avec ces propriétés et les fonctions dérivées respectives, on peut établir le tableau de variations des fonctions cosinus et sinus ainsi que l'allure de leurs graphes.
De la même manière, comme la fonction tangente est π-périodique, sa courbe représentative est invariante par une translation de vecteur $(\pi, 0)$. Il suffit donc de la connaître pour des valeurs dans un intervalle de longueur π, par exemple sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par ailleurs, la fonction tangente est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport

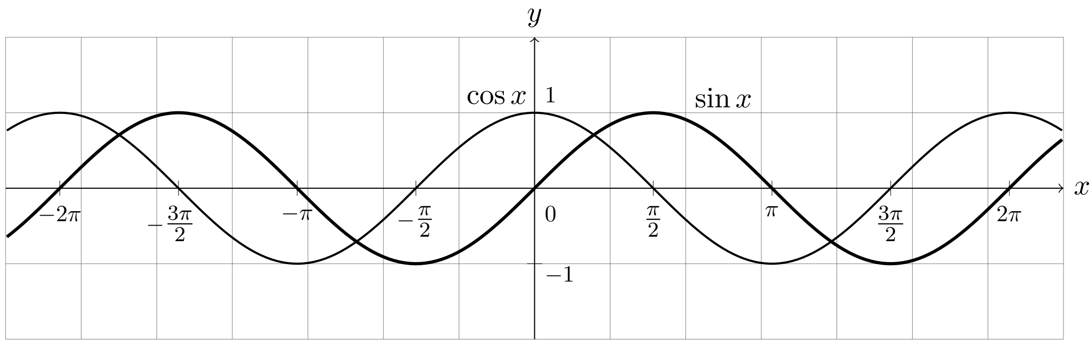


Figure 3.1 – Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

à l'origine du repère. Ces propriétés de périodicité et de parité nous permettent au final d'obtenir sa courbe représentative en ne connaissant la fonction tangente seulement pour les valeurs se situant dans $[0, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction tangente n'est définie que sur $D_T = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$. Son image est $\mathbb{R}$ tout entier ; en effet, sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\,[$, avec $k \in \mathbb{Z}$, la fonction tangente est continue et elle croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Avec ces propriétés et le fonction dérivée, on peut établir le tableau de variations de la fonction tangente ainsi que l'allure de son graphe.

Exercice (Position au voisinage de zéro).

1. Déterminer l'équation de la tangente T_0 en $x_0 = 0$ des courbes $\mathcal{C}_{sin}$ et $\mathcal{C}_{tan}$ des fonctions sinus et tangente.
2. En utilisant des arguments de convexité, étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ la position relative de cette tangente T_0 avec $\mathcal{C}_{sin}$ et $\mathcal{C}_{tan}$. Reformuler ces positions en terme d'inégalités.

Exercice. Etudier la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par l'expression $f(x) := \sin x + \cos x$.

3.2 Les fonctions logarithmes

3.2.1 Définition du logarithme népérien et premières propriétés

La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) := \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et deux d'entres elles diffèrent d'une constante (résultat que nous justifierons dans le chapitre 5 sur l'intégration).

Définition (Logarithme népérien). Le *logarithme népérien*[1] est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x_0 = 1$. C'est-à-dire,

$$\boxed{\begin{array}{llll} \ln : &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x := \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt\ . \end{array}}$$

1. Du nom du mathématicien et financier écossais John Neper (ou Napier) qui inventa la notion de logarithme en 1614.

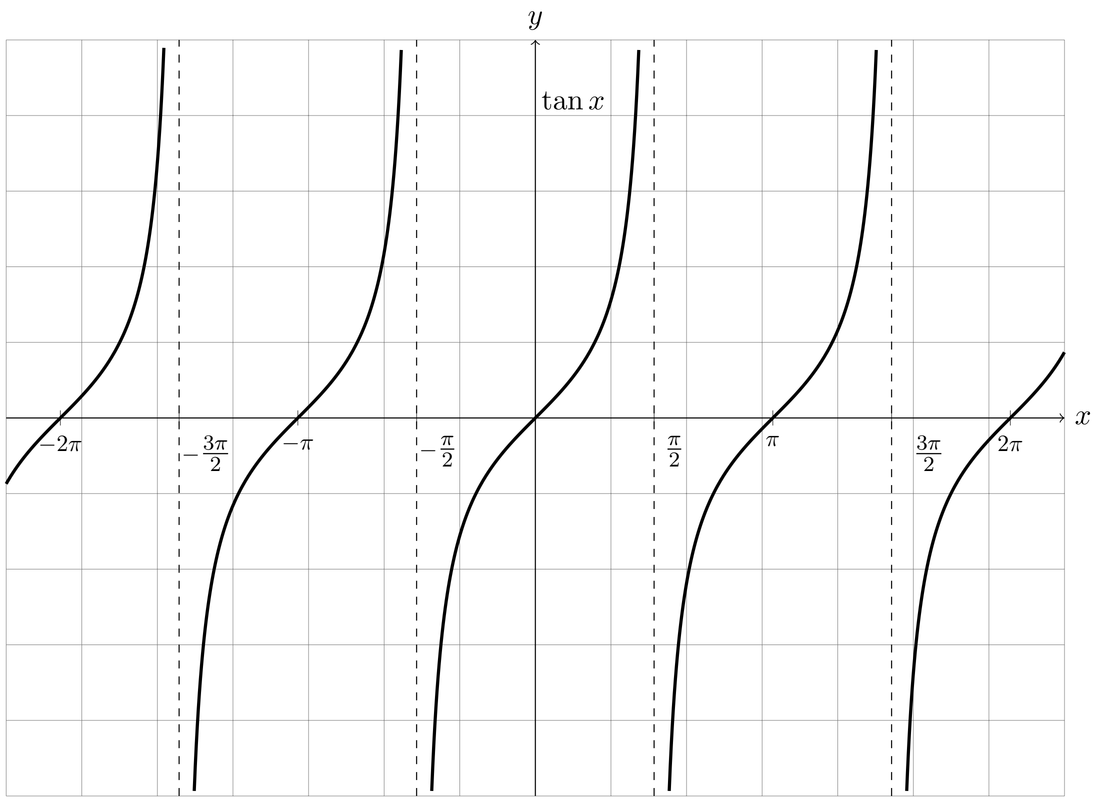


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la fonction tangente

On a bien $\ln 1 = 0$. Cette fonction, en tant que primitive, est évidemment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \ .$$

Proposition 17. *Si a, b sont des réels strictement positifs, on a*

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b.}$$

Démonstration. — Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Considérons la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) := \ln(ax)$. La règle de dérivation des fonctions composées nous dit que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée vaut

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} \ ,$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$. Les fonctions g et ln ont même fonction dérivée $\frac{1}{x}$ et sont donc deux primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Elles ne diffèrent donc que d'une constante C, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln x + C$. En prenant $x = 1$, on trouve que $C = g(1) = \ln a$. Donc pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$. On obtient évidemment la proposition en posant $x = b$. □

Remarque. Cette relation $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ de la proposition 17 caractérise la fonction logarithme népérien parmi les fonctions définies sur $]0, +\infty[$, dérivables en 1, telles que $f'(1) = 1$. L'exercice suivant le démontre

Exercice. Soit une fonction f définie sur $]0, +\infty[$, dérivable en 1, vérifiant $f'(1) = 1$ et telle que on ait $f(ab) = f(a) + f(b)$, pour tout $a > 0$ et $b > 0$. On va montrer qu'alors cette fonction n'est rien d'autre que la fonction logarithme népérien $f = \ln$ de la manière suivante.

1. Montrer que $f(1) = 0$, puis que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 1$.
2. En déduire alors que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = 1/x$.
3. Conclure alors que $f = \ln$.

La proposition 17 nous donne aisément les propriétés suivantes.

Propriétés. Pour tout nombres réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln a \ , \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \ , \\ \ln\left(a^n\right) &= n \ln a \ . \end{aligned}}$$

Ces dernières relations permettent d'obtenir les limites en 0^+ et $+\infty$ de la fonction ln :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \mapsto +\infty} \ln x &= +\infty \ , \\ \lim_{x \mapsto 0^+} \ln x &= -\infty \ . \end{aligned}}$$

Démonstration. — Pour la première propriété, il suffit de remarquer que

$$0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) .$$

La seconde s'obtient avec

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a.\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) .$$

Enfin, on démontre la dernière propriété par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Puis, pour $-n \in \mathbb{N}$, on utilise ce qui vient d'être montré.

Pour les limites, examinons d'abord la limite quand $x \to +\infty$. On remarque d'abord que la fonction logarithme népérien ln est croissante sur $]0, +\infty[$ puisque sa dérivée $\frac{1}{x} > 0$ est positive. Or, d'après les formules ci-dessus, on a

$$\ln(2^n) = n \ln 2, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

Comme $\ln 2 > 0$, alors $\ln(2^n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. On en conclut que $\ln x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Pour la limite à droite en 0, posons $u = \frac{1}{x}$. Alors $\ln u = -\ln x$, et quand $x \underset{>}{\to} 0$, on a $u \to +\infty$ donc $\ln u \to +\infty$ et $\ln x \to -\infty$. □

3.2.2 Représentation graphique

Passons à présent à la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Comme sa fonction dérivée $\ln' : x \mapsto 1/x$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, la fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, la fonction logarithme népérien est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et la dérivée seconde

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} .$$

est strictement négative sur $]0, +\infty[$. La fonction logarithme népérien est donc strictement concave sur $]0, +\infty[$ avec des pentes des tangentes à sa courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ qui tendent à devenir nulles pour les points d'abscisses tendant vers $+\infty$. On obtient ainsi la courbe suivante.

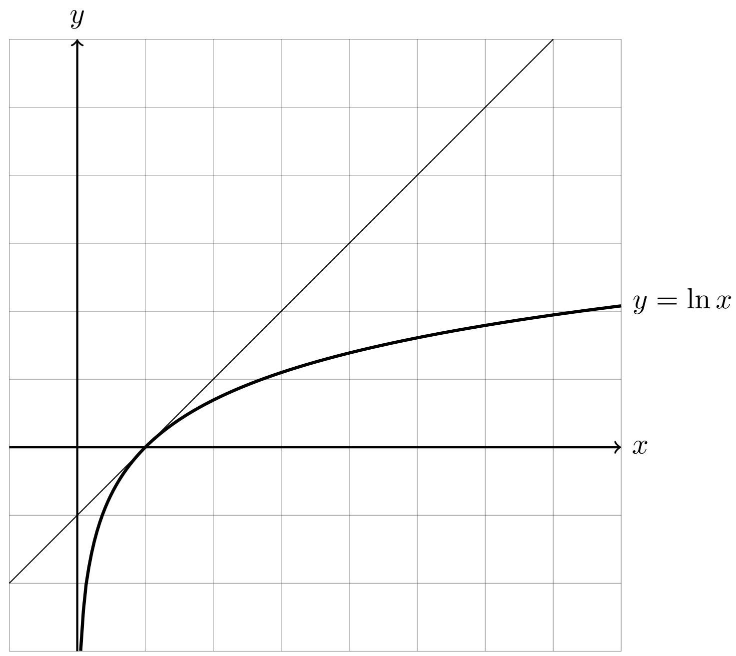


FIGURE 3.3 – Représentation graphique de la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est continue puisqu'elle est dérivable, l'ensemble de ses images, $\ln(\mathbb{R}^{+*})$ est donc un intervalle par le théorème des valeurs intermédaires. Et comme elle est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, l'ensemble de ses images est l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels tout entier. De plus, la croissance stricte impose que tout réel y de $\mathbb{R}$ est l'image d'un unique réel positif. La fonction logarithme népérien est donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume toutes ces propriétés.

Proposition 18. *La fonction logarithme népérien est une bijection continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $\mathbb{R}$.

En particulier il existe un unique $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\ln x = 1$. On appelle ce nombre la *constante d'Euler* et on le note la lettre e. On peut démontrer que e est irrationnel. Le début de son développement décimal est $e = 2{,}71828\ldots$.

Pour compléter le lexique indispensable sur la fonction logarithme népérien, il peut être utile de se rappeler, puisque son nombre dérivée en $x_0 = 1$ est 1, que :

$$\boxed{\lim_{h \mapsto 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}\ .$$

Enfin, son comportement asymptotique au voisinage de 0^+ et $+\infty$ est précisé par la proposition qui suit (nous en verrons une autre plus fine dans le chapitre suivant).

Proposition 19. *On a les limites suivantes*

$$\boxed{\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto 0^+} x \ln x = 0}\ .$$

Démonstration. — Ces deux limites sont en faites équivalentes, on le vérifie en posant $x = \frac{1}{y}$ dans l'une des deux pour obtenir l'autre et en utilisant ($x \to +\infty \Leftrightarrow y \to 0^+$) ou ($x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty$). Montrons la première limite. La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) := \ln x - 2\sqrt{x}$ est à valeurs strictement négatives (montrez le). On a ainsi

$$\forall x > 1, \quad 0 < \ln x < 2\sqrt{x} \ .$$

Ceci permet d'établir, après division par x pour $x > 1$,

$$\forall x > 1, \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \ .$$

Cet encadrement permet de conclure par passage à la limite en $x \to +\infty$. □

Exercices.

1. A partir de la courbe représentative de la fonction logarithme ln, déduire le tracé des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1}{(1+x)^2}\right) \end{array} .$$

2. Étudier la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) := x \ln x - x$.

3. Montrer que :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \mapsto 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = 1 \ .$$

3.2.3 Logarithme de base a

Définition (Logarithme de base a). Soit a un réel strictement supérieur à 0. On appelle *logarithme de base a* la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\boxed{\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}} \ .$$

Le logarithme népérien est le logarithme de base e.

Lorsque $a > 1$, $\ln a > 0$, donc les propriétés de croissance et les limites en 0 et $+\infty$ sont les mêmes que pour le logarithme népérien.

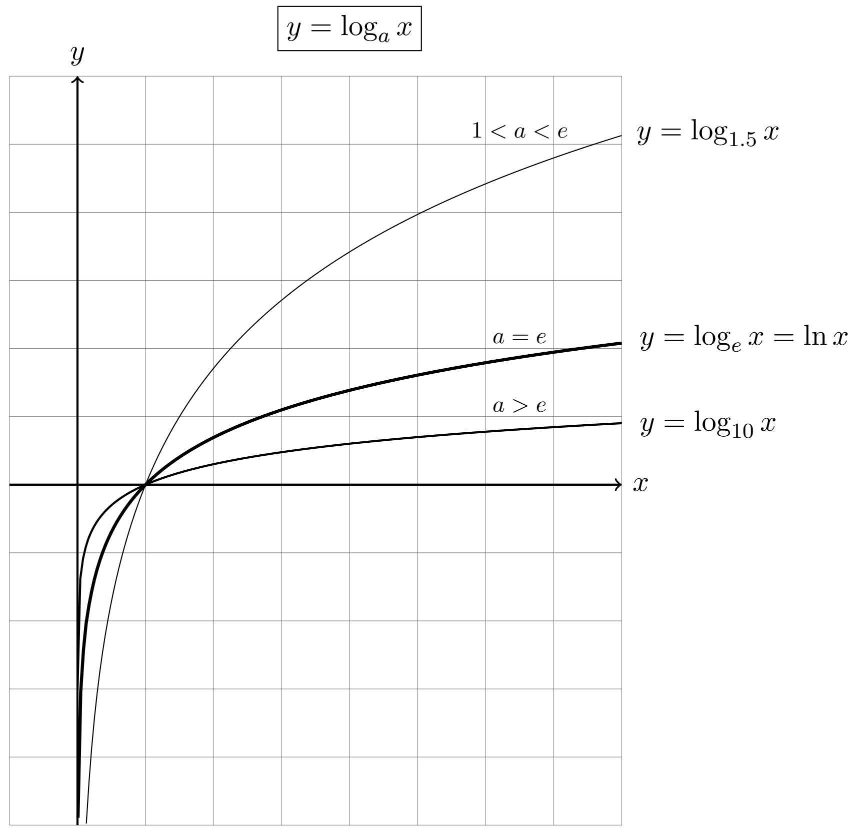


FIGURE 3.4 – Représentations graphiques de plusieurs logarithmes de bases différentes

REMARQUE. On utilise en particulier les *logarithmes décimaux*, c'est-à-dire de base 10, notés tout simplement $\log x$. Ils sont assez commodes pour évaluer les ordres de grandeur : en effet si n est la partie entière de $\log x$, cela signifie que x se situe entre 10^n et 10^{n+1}.

EXEMPLE. Déterminer le nombre de chiffres du nombre : 2^{2013}.

3.3 Les fonctions exponentielles

3.3.1 Définition de la fonction exponentielle

Puisque la fonction logarithme népérien décrit une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque, strictement croissante et continue (admis) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Définition (Fonction exponentielle). On appelle *fonction exponentielle* la réciproque de la fonction logarithme népérien, et on la note $\exp x$ ou e^x. On a donc

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp x, \quad \text{avec } \exp x = y \Leftrightarrow \ln y = x \ . \end{array}}$$

Dis autrement,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp x) = x} \ .$$

Des valeurs $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$, on déduit immédiatement

$$\boxed{\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(1) = e\ .}$$

3.3.2 Représentation graphique

On travaille dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé. Comme les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre, la courbe représentative $\mathcal{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle et celle $\mathcal{C}_{\ln}$ de la fonction logarithme népérien sont symétriques d'axe de symétrie la première bissectrice $\Delta = \{M(x, y) \in P,\ y = x\}$. En effet,

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_{\exp} \iff y = \exp x \iff \ln y = x \iff M(y, x) \in \mathcal{C}_{\ln}\ .$$

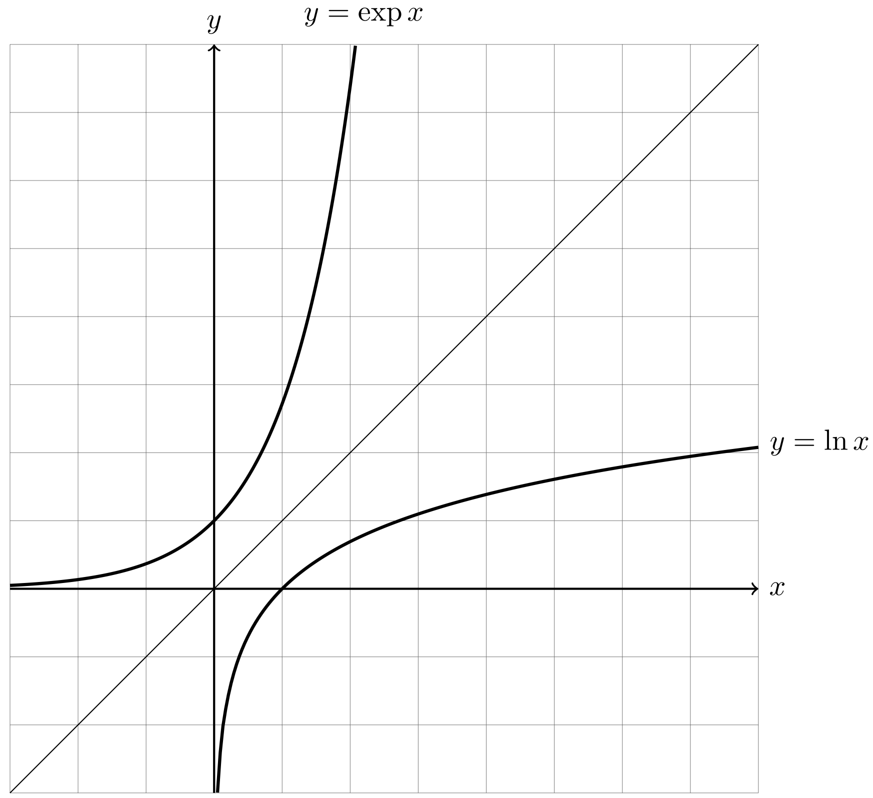


FIGURE 3.5 – Représentation graphique de la fonction exponentielle

3.3.3 Propriétés

Proposition 20. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut*

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}\ ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. — Nous admettrons ici que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous prouverons ce résultat dans un cadre plus général au prochain chapitre. Nous nous bornerons ici à déterminer la valeur de sa dérivée.
Nous avons $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp x)) = x \ .$$

En dérivant les deux membres de cette dernière égalité, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1,$$

c'est-à-dire : $\exp'(x) = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Proposition 21. *Pour tous réels a et b, on a*

$$\boxed{\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)} \ .$$

Démonstration. — Pour transformer l'expression $\exp(a) \cdot \exp(b)$, considérons son logarithme et appliquons la règle fondamentale de la proposition 17 :

$$\ln\left(\exp(a) \cdot \exp(b)\right) = \ln\left(\exp a\right) + \ln\left(\exp b\right) = a + b.$$

En composant avec la fonction exponentielle, on obtient la formule cherchée. □

Remarque. Comme dans le cas de la fonction logarithme népérien, cette relation $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ caractérise la fonction exponentielle parmi les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $f'(0) = 1$. L'exercice suivant le montre.

Exercice. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que f soit dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on ait $f(a + b) = f(a).f(b)$. On va montrer que $f = \exp$ à l'aide des questions suivantes.

1. Montrer que $f(0) = 1$, puis que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - 1}{h} = 1$,
2. En déduire alors que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = f(x)$,
3. En dérivant la fonction $\frac{f}{\exp}$, conclure que $f = \exp$.

Tout comme pour le logarithme népérien, on déduit immédiatement de la proposition 21 les propriétés suivantes.

Propriétés. Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\boxed{\begin{array}{c} \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp a} \ , \\ \exp(na) = (\exp a)^n \ . \end{array}}$$

Toutes ces formules justifient que l'on note également cette fonction e^x. En effet, elles expriment les mêmes propriétés que les expressions comportant des exposants :

$$\boxed{e^{a+b} = e^a\, e^b, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{na} = (e^a)^n} \ .$$

Pour terminer, précisons à présent le comportement asymptotique de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Le résultat qui suit est **fondamental**. Il formalise en particulier le fait que la fonction exponentielle croit vers l'infini plus rapidement que toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^n$.

Proposition 22. *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a les limites suivantes*

$$\boxed{\lim_{x \mapsto -\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty} \ .$$

Démonstration. — Ces deux limites sont équivalentes, on le vérifie en posant $x = -y$ dans l'une de ces deux limites pour obtenir l'autre. Montrons la seconde limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, on a

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \ln(e^x) - \ln(x^n) = x - n\ln(x) = x\Big(1 - n\frac{\ln x}{x}\Big),$$

puis en prenant l'exponentielle on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x^n} = e^{x\Big(1 - n\frac{\ln x}{x}\Big)}.$$

Par ailleurs, la convexité de la fonction exponentielle montre que sa tangente en zéro d'équation $y = 1+x$ se situe sous la courbe représentative, soit algébriquement : $e^x \geq 1+x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. À partir de l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{e^x}{x^n} \geq 1 + x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right) \ ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$. Or le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ car $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$. Ceci conclut que la seconde limite tend vers $+\infty$. □

Exercice. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) := e^{\frac{1}{x}}$.

1. Etudier les variations de f et ses limites en l'infini et en 0.
2. Etudier la convexité de f.
3. Tracer avec soin la courbe de f (préciser l'allure de cette dernière au voisinage du point O).

3.3.4 Fonction exponentielle de base a (fonction $x \mapsto a^x$)

Définition (Fonction exponentielle de base a). Soit $a > 0$ un réel strictement positif fixé. La *fonction exponentielle de base a* est la fonction suivante

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp_a(x) := a^x = e^{x \ln a} \ . \end{array}}$$

Remarque. Pour $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle, puisque $\ln e = 1$. De plus, on a $y = a^x$ si et seulement si $\ln y = x \ln a$, donc $x = \dfrac{\ln y}{\ln a} = \log_a y$. Autrement dit la fonction exponentielle $\exp_a$ de base a est la fonction réciproque de la fonction logarithme $\log_a$ de base a.

Proposition 23. *La dérivée de cette fonction est obtenue par dérivation de $e^{x \ln a}$, on trouve*

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x} \,.$$

Le sens de variation et les limites en $\pm\infty$ dépendent du signe de $\ln a$: la fonction est croissante de 0 à $+\infty$ si $a > 1$ (car $\ln a > 0$) et décroissante de $+\infty$ à 0 si $0 < a < 1$ (car $\ln a < 0$). Elle est constante si $a = 1$.

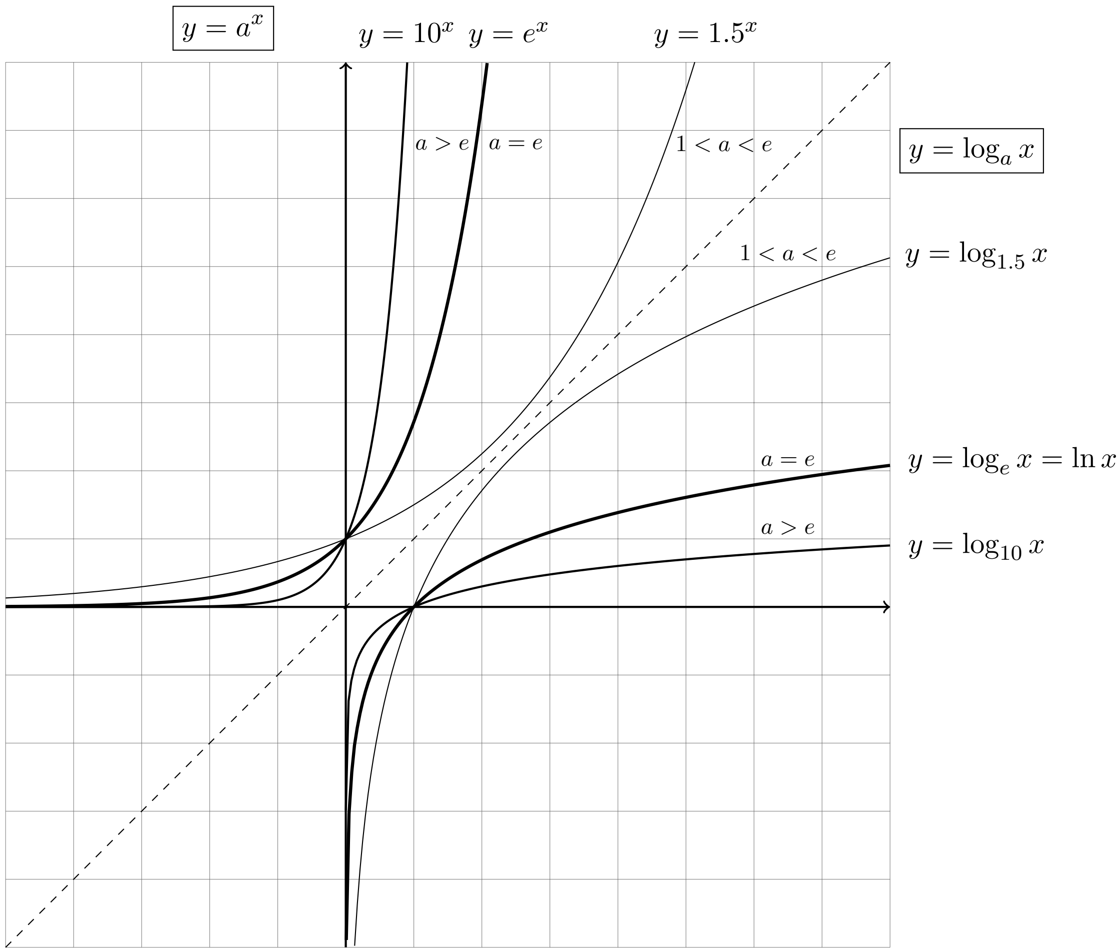


FIGURE 3.6 – Représentations graphiques des fonctions logarithmes et exponentielles

EXERCICE.

1. Tracer le graphe des fonctions $f(x) := (0.5)^x$ et $g(x) := 2^x$.
2. Comment passe-t-on géométriquement d'un graphe à l'autre ?

3.4 Courbes planes d'équation $y = f(x)$

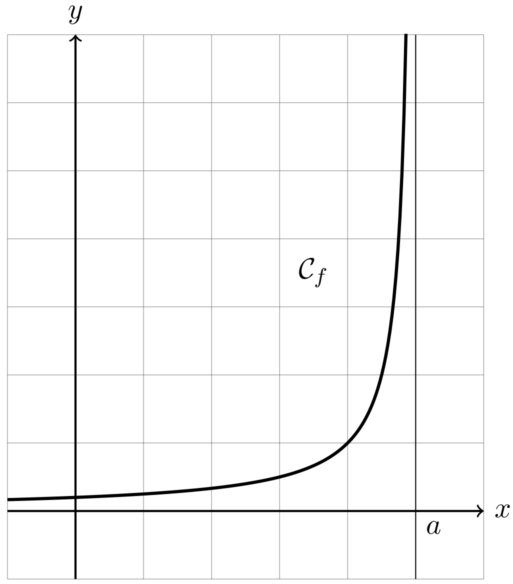
La *courbe plane d'équation* $y = f(x)$ est la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f associée à l'expression $f(x)$. On notera dans la suite D_f le domaine de définition de l'expression $f(x)$. Dans toute la suite le plan P est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

3.4.1 Branche infinie, comportement asymptotique

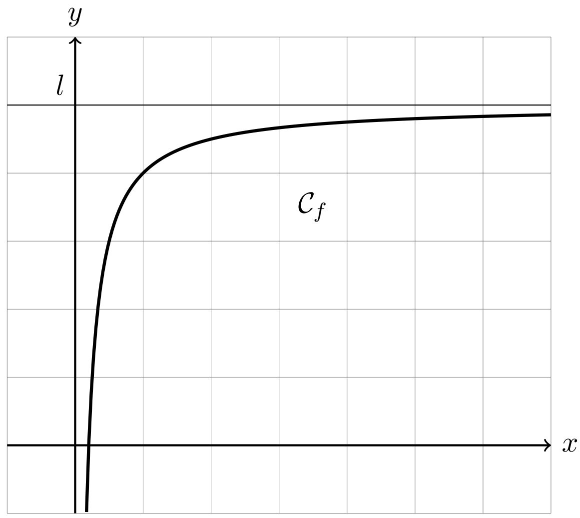
Définition (**Branche infinie**). On dit qu'une courbe d'équation $y = f(x)$ possède une *branche infinie* si la distance de l'origine O à un point $M(x, y)$ de cette courbe peut devenir aussi grande que l'on veut, c'est-à-dire $||OM(x, y)|| \to +\infty$, lorsque x tend vers un point de D_f ou vers une borne de D_f.

Dans ce qui suit, on note $\pm\infty$ pour traiter en même temps les cas $+\infty$ et $-\infty$. On s'intéresse plus particulièrement aux trois situations suivantes :

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée *asymptote verticale* à la courbe.



2. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ pour un certain réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est appelée *asymptote horizontale* à la courbe.



3. Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on cherche à savoir si la courbe d'équation $y = f(x)$ se rapproche à l'infini d'une courbe mieux connue. Nous allons étudier systématiquement le cas d'une droite.

Définition (Courbes asymptotes). Deux courbes d'équation respective $y = f(x)$ et $y = g(x)$ ayant des branches infinies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont dites *asymptotes* au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la distance les séparant tend vers 0, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0) \ .$$

Si la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est une droite D d'équation $y = mx + p$, alors D est asymptote à $\mathcal{C}_f$ lorsque

$$f(x) - (mx + p) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \iff x \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x} \right) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \ .$$

Lorsque cela arrive, il faut et il suffit que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et que} \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = p \ .$$

Donc lorsque l'on ne connait pas l'équation de la droite D asymptote, on peut procéder comme suit.

1. On commence par calculer, sous réserve d'existence, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite est finie, notons la m, ce nombre réel est éventuellement le coefficient directeur de la droite.

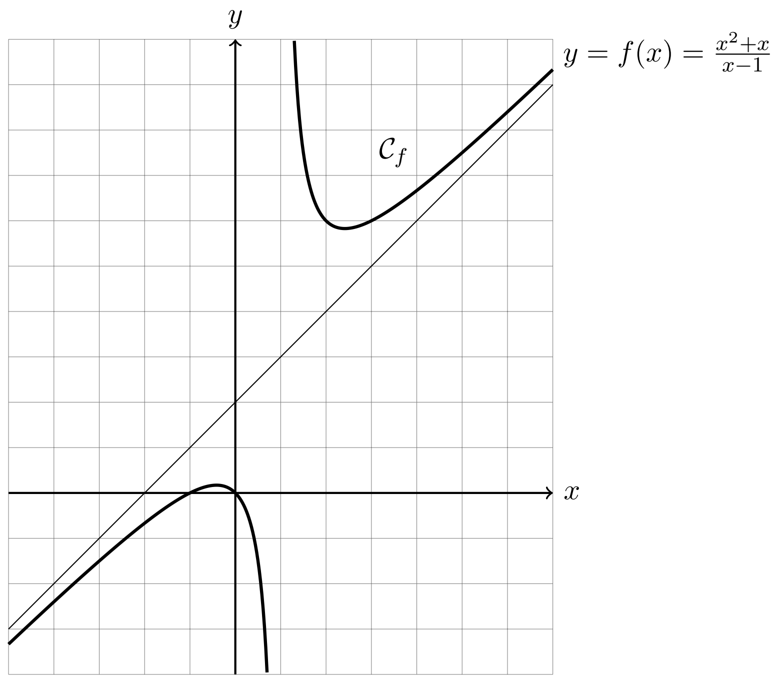
2. Pour s'en assurer, on calcule ensuite, sous réserve d'existence, $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$. Si cette limite est finie, notons la p, ce nombre réel est l'ordonnée à l'origine de la droite.

Proposition 24. *Si ces deux conditions sont vérifiées alors la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = mx + p$ comme asymptote.*

Si les limites mentionnées ci-dessus ne sont pas finies, voire n'existent pas, il n'y a pas de droite asymptote. Il y a cependant certains cas particuliers de comportements intéressants. Le tableau ci-dessous résume les trois cas à connaître.

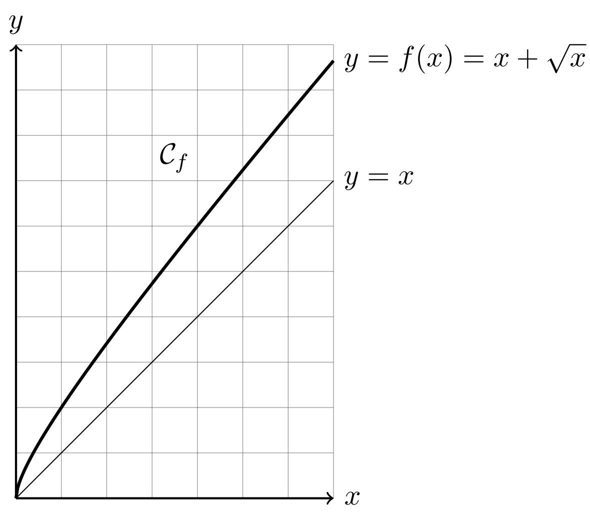
◇ Asymptote oblique d'équation $y = mx + p$:

$$\text{lorsque} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = p \ .$$

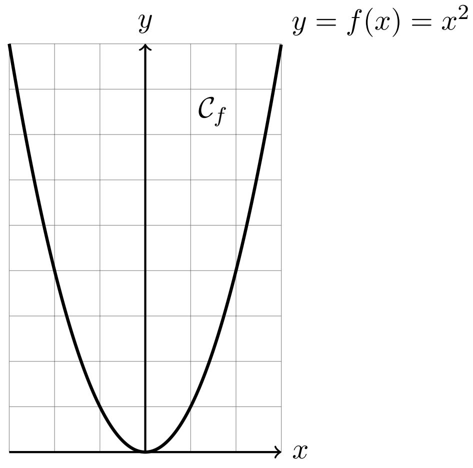


$\diamond$ Branche parabolique de direction $y = mx$:

$$\text{lorsque} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty \ .$$



$\diamond$ Branche parabolique de direction Oy : lorsque $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.



EXERCICE. Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ des trois fonctions définies par les expressions suivantes :

- ◇ $f_1(x) := 2x + 1 + \ln(x)$,
- ◇ $f_2(x) := \sqrt{x^2 + 2x}$,
- ◇ $f_3(x) := \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$.

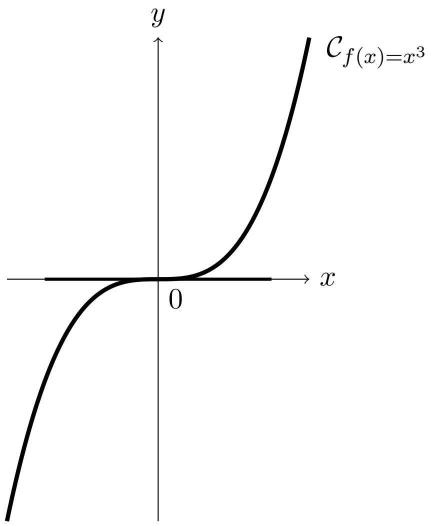
REMARQUE. Dans le cas d'une asymptote oblique, on peut parfois préciser la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.

- ◇ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - p) = 0^-$, la courbe de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de l'infini.
- ◇ Si $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - p) = 0^+$, la courbe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de l'infini.

3.4.2 Points d'inflexion et convexité

Définition (Point d'inflexion). Un *point d'inflexion* est un point de la courbe où celle-ci traverse sa tangente.

EXEMPLE. L'origine est un point d'inflexion pour $y = x^3$, mais pas pour $y = x^4$.



Proposition 25. *Si une fonction f est deux fois dérivable, les points d'inflexion sont exactement les points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.*

Rappelons que le théorème 14 du chapitre précédent stipule qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée seconde est positive sur l'intervalle I est convexe sur l'intervalle I.

EXEMPLE. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

3.4.3 Plan d'étude d'une courbe plane d'équation $y = f(x)$

Voici un plan d'étude point par point d'une courbe plane d'équation $y = f(x)$.

1. Recherche du domaine de définition de l'expression $y = f(x)$. Réduction de l'ensemble d'étude de la fonction f par des considérations de parité, périodicité, etc.
2. Étude de la continuité de f sur chaque intervalle de l'ensemble d'étude. Valeurs et/ou limites aux bornes.
3. Étude de la dérivabilité de f. Décomposition de chaque intervalle en sous-intervalles où la fonction f est monotone en utilisant le signe de la dérivée. Valeurs aux bornes de ces sous-intervalles.
4. Étude aux points de non-dérivabilité. Dans le cas où la fonction f n'est pas dérivable en un point x_0 :
   - ◇ si elle admet cependant une dérivée à droite et/ou une dérivée à gauche (distincte) : il y a une (ou deux) demi-tangentes en x_0,
   - ◇ si $f'(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers x_0 : il y a une tangente verticale en x_0 ; il peut aussi y avoir une ou deux demi-tangentes verticales.
5. Consignation des résultats dans un tableau de variations.
6. Étude de la convexité et recherche des points d'inflexion.
7. Recherche des branches infinies et asymptotes.
8. Tracé des asymptotes et de la courbe.

3.5 Exercices sur les fonctions de référence

Exercice 44. Résoudre graphiquement les deux équations suivantes dans $[0, 2\pi]$:

- ◇ $\sin x > \frac{1}{2}$;
- ◇ $\cos x \leqslant \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 45. Soit $f := \cos_{|[0,2\pi]}$ la restriction à $[0, 2\pi]$ de la fonction cosinus. Tracer la courbe représentative de la fonction f et utilisez-la pour répondre aux questions suivantes.

1. Quelle est l'image par f des intervalles suivants :

$$]0, \pi[, \quad]0, 2\pi[, \quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{et} \quad \left]\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] .$$

2. Déterminer les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geqslant 1\} , \\ B &:= \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) > 0\} , \\ C &:= \left\{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = \frac{1}{2}\right\} , \\ D &:= \left\{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\} . \end{aligned}$$

Exercice 46. Déterminer la période T et tracer la courbe sur $[0, 4\pi]$ des trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) := \sin(2x), \quad f_2(x) := \sin(2x + \pi/4), \quad \text{et} \quad f_3(x) := \sin\left(\frac{1}{2x}\right) .$$

Exercice 47. On considère la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) := \cos(2x) - 2\sin x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Déterminer la valeur (exacte) minimale prise par f.

Exercice 48.

1. Montrer que $x\cos x - \sin x < 0$, pour tout $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier les variations de la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.
3. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a :

$$\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} .$$

Exercice 49. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) := \ln(x) - 4\sqrt{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{1 - \sqrt{\sqrt{x}}}{x}$.
2. Étudier les variations de f et en déduire :

$$\forall\ x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) < 4\sqrt{\sqrt{x}} .$$

Exercice 50. Étudier la fonction numérique f définie par l'expression $f(x) := \ln(2 + \frac{1}{x})$.

Exercice 51. On considère la fonction numérique f associée à l'expression $f(x) := \frac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
3. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls (a, b) tels que $a^b = b^a$.

Exercice 52. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) := \frac{x-1}{x^2+1} \ .$$

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que $f''(x)$ est du signe de $(x+1)(x^2-4x+1)$. Étudier la convexité de la fonction f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 53.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f associée à l'expression $f(x) := \ln\big(\ln x\big)$?
2. Montrer que cette fonction est concave.
3. En déduire que, pour tous nombres réels x et y strictement supérieurs à 1, on a l'inégalité :
$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\big(\ln x\big)\big(\ln y\big)} \ .$$

Exercice 54. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f(x) := 2\mathrm{e}^{x-1} - x^2 - x \ .$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la convexité de f.
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
3. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

Exercice 55. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par l'expression :

$$f(x) := (x+4)e^{\frac{(x-1)}{x^2}} .$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 0.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = (x+2)h(x)$ où h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. (a) Donner la limite en $+\infty$ de l'expression $e^{\frac{(x-1)}{x^2}}$.

   (b) Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de $e^{\frac{(x-1)}{x^2}} - 1$.

(c) En déduire la droite asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et leur position relative.

(d) Suivre la même méthode pour trouver la droite asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et leur position relative.

4. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au voisinage du point $(0, 0)$.
5. Tracer D et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 56. On considère la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par l'expression $f(x) := e^x \sin x$.

1. Étudier le sens de variation de f et déterminer ses points d'inflexion.
2. Tracer dans un même repère les graphes des fonctions f, exp et $-\exp$. On tracera les tangentes aux points d'inflexion et on respectera la position relative de ces tangentes par rapport aux graphes des fonctions f, exp et $-\exp$.

Exercice 57. On considère la fonction rationnelle

$$f(x) := \frac{x^4 - x^3}{x^3 + 1} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ .$$

1. Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$x - 1 + \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + 1} \ ,$$

où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire l'existence d'une droite asymptote pour la courbe d'équation $y = f(x)$, et préciser leur position relative aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 58. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) := xe^{\frac{1}{1-x^2}} \ .$$

1. Déterminer la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ?
2. Déterminer les limites à droite et à gauche de la fonction f au point $x = 1$.
3. Calculer la dérivée de f et la limite à droite au point $x = 1$ de f' .
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de l'expression $e^{\frac{1}{1-x^2}}$. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet au voisinage de $+\infty$ une droite asymptote. On précisera la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Préciser l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point $(1, 0)$. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 59. On considère la fonction définie par l'expression

$$f(x) := x\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \ .$$

1. Pour quelles valeurs de x, l'expression $f(x)$ est-elle définie ? On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f.
2. Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que

$$\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1})} \quad \text{pour} \quad x \geq 2\ .$$

4. En déduire que la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$ vaut $-\frac{1}{2}$.
5. Conclure que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation. Préciser leur position relative.

Chapitre 4

Les fonctions réciproques de référence

Le but de ce chapitre est d'étudier la notion générale de *fonction réciproque*. Nous l'appliquerons aux fonctions puissance et aux fonctions trigonométriques pour introduire *d'importantes nouvelles fonctions*.

4.1 Généralités sur les fonctions réciproques

Une fonction $f : X \to Y$ est un processus qui associe à chaque élément x de X un unique élément y de Y. Une question naturelle que l'on peut se poser est de savoir s'il existe une fonction $g : Y \to X$ qui « permet de revenir en arrière », c'est-à-dire telle que $g(f(x)) = x$ pour tout x de X.

$$X \underset{\mathrm{g}}{\overset{\mathrm{f}}{\rightleftarrows}} Y$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est la fonction racine carrée $f(x) := \sqrt{x}$, l'élévation au carré $g(x) := x^2$ convient comme fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

On demande aussi à la fonction g de vérifier l'égalité $f(g(y)) = y$ pour tout y de $Y = \mathbb{R}$. En reprenant l'exemple de la racine et du carré, on se rend compte ici d'un problème. On a bien $\sqrt{y^2} = y$ pour $y \geq 0$, mais $\sqrt{y^2} = -y$ pour $y < 0$. Il faut donc être attentif aux ensembles de départ et d'arrivée des fonctions f et g.

Pour une fonction $f : X \to Y$ donnée, une fonction réciproque n'existe pas forcément, mais sera unique si elle existe. Pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes à cette existence, on étudie le nombre d'antécédents par f qu'admet chaque élément de Y.

4.1.1 Injection, surjection et bijection

Dans cette section, X et Y représentent deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. La notation $f : X \to Y$ signifie que f est une fonction définie sur X et à valeurs dans Y.

Remarque. On rappelle qu'on nomme ensemble de définition de f le plus grand sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ tel que l'expression $f(x)$ est définie pour tout x dans D_f. L'ensemble X ci-dessus doit donc être un sous-ensemble de D_f.

De plus, pour que la notation $f : X \to Y$ ait un sens, il est aussi nécessaire que Y contienne tous les nombres de la forme $f(x)$ pour x dans X, c'est-à-dire que $f(X) \subset Y$. Par exemple, parler de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ telle que $f(x) = x^2$ n'a pas de sens.

Définition (Injection, surjection, bijection). Soit $f : X \to Y$ une fonction.

- ◇ La fonction f est dite *injective* si tout point de Y a au plus un antécédent par f.
- ◇ La fonction f est dite *surjective* si tout point de Y a au moins un antécédent par f.
- ◇ La fonction f est dite *bijective* si tout point de Y a exactement un antécédent par f.

Proposition 26. *Soit $f : X \to Y$ une fonction.*

- ◇ *La fonction f est injective si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in X$, la condition $x_1 \neq x_2$ entraîne $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- ◇ *La fonction f est surjective si et seulement si l'image de la fonction f est l'ensemble Y dans son entier : $f(X) = Y$.*
- ◇ *La fonction f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Exemple. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'expression $f(x) = x^2$.

- ◇ La fonction f n'est pas injective puisque $f(2) = f(-2) = 4$, c'est-à-dire que 4 admet au moins 2 antécédents ; c'est au moins un de trop. En revanche la restriction $g := f_{|\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de f à $\mathbb{R}^+$ est injective car tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet au plus un antécédent par g :
  — si $y < 0$ alors y n'admet aucun antécédent par g,
  — si $y \geq 0$ alors y admet comme unique antécédent $(\sqrt{y})$ par g.
- ◇ La fonction f n'est pas non plus surjective car -1 n'admet pas d'antécédent par f. En revanche la réduction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de f au sous-ensemble $\mathbb{R}^+$ de son ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ est surjective car tout nombre positif y admet au moins un antécédent par h.
- ◇ De notre petite étude, nous pouvons déduire que la fonction $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ obtenue par réduction et restriction de la fonction f est bijective. En effet, tout nombre positif y admet exactement un antécédent par k, il s'agit de la racine carrée $\sqrt{y}$. De la même manière, la fonction $l : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ par $l(x) = x^2$ est une bijection car tout nombre positif y admet pour unique antécédent, il s'agit de $-\sqrt{y}$.

Remarque. Pour obtenir une fonction injective à partir d'une fonction $f : X \to Y$, il suffit de restreindre la fonction f à un plus petit ensemble de départ bien choisi. Pour obtenir une fonction surjective, il suffit de réduire la fonction f au plus petit ensemble d'arrivée $f(X)$, l'ensemble image de la fonction f à savoir l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ pour x dans X. En particulier, si f est injective de X dans Y, on remarque que la réduction de f réalise une bijection de X sur $f(X)$.

Le théorème suivant permet bien souvent de montrer qu'une fonction numérique continue est bijective.

Théorème 16. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle et la fonction $I \to f(I), x \mapsto f(x)$ est bijective.*

Démonstration. — La fonction f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f(I)$ est un intervalle. De plus, le fonction f étant strictement monotone, pour

x_1 et x_2 dans I, l'inégalité $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ (suivant que f est croissante ou décroissante). Donc $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui signifie que f est injective de I dans $\mathbb{R}$. On conclut en utilisant la fin de la remarque précédente. $\square$

Exercice. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := x^2 - 2x$ est-elle bijective ? Si ce n'est pas le cas, modifier les ensembles de départ et/ou d'arrivée en choisissant des sous-ensembles les plus grands possibles pour obtenir une fonction f d'expression $f(x) := x^2 - 2x$ qui soit bijective.

4.1.2 Fonction réciproque

Par définition, pour une fonction $f : X \to Y$ bijective, tout élément y de Y admet un unique antécédent, c'est-à-dire qu'à chaque $y \in Y$ correspond un unique élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Cela définit une fonction de Y dans X, appelée fonction réciproque de f

Définition (Fonction réciproque). Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective, on appelle *fonction réciproque* de f la fonction $f^{-1} : Y \to X$ définie par

$$y \in Y \mapsto \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \ .$$

Dit autrement, la fonction réciproque est caractérisée par

$$\boxed{\forall y \in Y\ , \forall x \in X\ ,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)}\ .$$

Propriétés.

- ◇ On a
$$f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in Y \quad \text{et} \quad f^{-1}(f(x)) = x\ \forall x \in X\ .$$
- ◇ Si une fonction f est bijective alors sa fonction réciproque l'est aussi et la fonction réciproque de la fonction réciproque n'est autre que la fonction f, c'est-à-dire
$$(f^{-1})^{-1} = f\ .$$

Remarques.

- ◇ Un exemple fondamental de fonctions réciproques l'une de l'autre sont les fonctions exponentielle et logarithme.
- ◇ **Il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec la fonction inverse $\frac{1}{f}$.**

Exemple. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) := 2x + 1$. La fonction h est bijective et sa bijection réciproque $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $h^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Exemple. On considère la fonction définie par l'expression

$$f(x) := \frac{x+1}{2x+3}\ .$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$. Elle y est dérivable avec pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{(2x+3)^2} > 0$. Elle induit donc deux bijections de $] - \infty, -\frac{3}{2}[$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et de $] - \frac{3}{2}, +\infty, [$ sur $] - \infty, \frac{1}{2}[$ respectivement. Au final, la fonction f est bijective de $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

Pour déterminer l'expression de sa réciproque, on résout l'équation suivante. On *fixe* un $y \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ et on *cherche* $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ tel que

$$y = \frac{x+1}{2x+3} \Longleftrightarrow (2x+3)y = x+1 \Longleftrightarrow 2xy - x = x(2y-1) = 1-3y \Longleftrightarrow x = \frac{1-3y}{2y-1}\ .$$

La fonction réciproque $f^{-1}\ :\ \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ a donc pour expression

$$f^{-1}(y) = \frac{1-3y}{2y-1}\ .$$

4.1.3 Graphe d'une bijection et de sa réciproque

Considérons une fonction numérique bijective $f : X \to Y$ et sa bijection réciproque $f^{-1} : Y \to X$.
Le couple (a, b) appartient au graphe de f si et seulement si $b = f(a)$, ce qui équivaut à $a = f^{-1}(b)$, c'est-à-dire que le couple (b, a) appartient au graphe de f^{-1}. Dans un repère orthonormé, les points de coordonnées les couples (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la première bissectrice. On a donc la propriété suivante.

Proposition 27. *Dans un repère orthonormé, la représentation graphique d'une fonction bijective et celle de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

4.1.4 Sens de variation d'une fonction réciproque

Proposition 28. *Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective et strictement monotone sur l'ensemble X, alors sa fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation sur l'ensemble Y.*

Démonstration. — Étudions le cas où f est strictement croissante. Soient y et y' dans Y tels que $y < y'$. Posons $x := f^{-1}(y)$ et $x' := f^{-1}(y')$. Raisonnons par l'absurde : si l'on avait $x \geq x'$, on aurait $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$. Contradiction. Donc $x < x'$ et la fonction f^{-1} est strictement croissante. Le cas où f est strictement décroissante s'étudie de la même façon. □

4.1.5 Continuité et dérivabilité d'une fonction réciproque

Concernant la continuité, on admet le résultat suivant.

Proposition 29. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to J$ est une bijection continue alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue.*

Attention. **La condition que I est un intervalle est essentielle.** Considérez par exemple la fonction $f : [0, 1] \cup]2, 3] \to [0, 2]$ définie par les expressions $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ et $f(x) = x - 1$ pour $x \in]2, 3]$. Cette fonction est continue et bijective mais sa réciproque (décrivez la !) n'est pas continue en 1.

Proposition 30. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection continue. Si la fonction f est dérivable au point $x_0 \in I$ et que $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable au point $y_0 := f(x_0)$ et sa dérivée vaut alors*

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}\ .$$

Démonstration. — Les hypothèses impliquent que f^{-1} est continue en appliquant la proposition précédente. Soient $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. Si $y \neq y_0$ on a forcément $x \neq x_0$ et bien sûr $f(x) - f(x_0) \neq 0$.
Alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} .$$

Quand $y \to y_0$, x tend vers x_0 (parce que f^{-1} est continue) donc la deuxième fraction tend vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque. Par contre, si $f'(x_0) = 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$ et le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale au point $M(y_0, f^{-1}(y_0)) = M(f(x_0), x_0))$. C'est notamment le cas en $x_0 = 0$ pour la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$. En effet, la fonction réciproque f^{-1} est la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 et dont la demi-tangente y est verticale.

4.2 Fonctions puissance

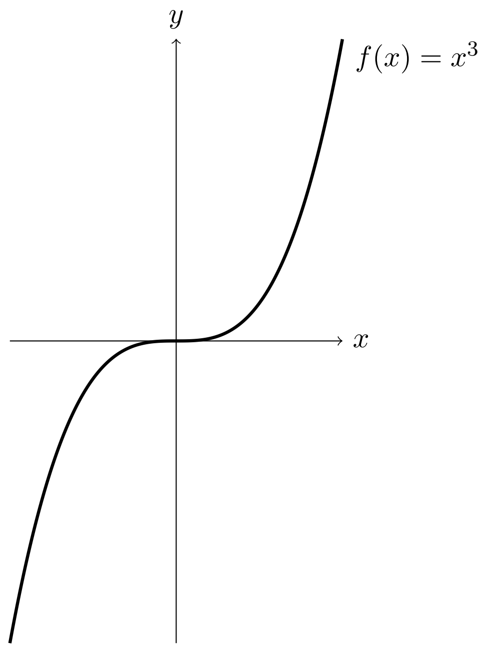
Les fonctions puissance déjà connues sont les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{llll} P_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$$

pour les entier relatifs $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette section est de définir les fonctions puissance $x \mapsto x^r$ dans le cas le plus général possible. Le nombre r sera d'abord l'inverse d'un entier, puis un rationnel, et finalement un réel quelconque.

4.2.1 Racine n^{e}

$\diamond$ **Si** $n = 2k + 1$ **est un entier naturel impair** ($k \in \mathbb{N}$), alors la fonction puissanceP_n est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même.



Elle admet donc une fonction réciproque, qui est également une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Définition (Racine n^e, pour n entier naturel impair). La fonction réciproque de la fonction puissance P_n est la fonction *racine n^e* :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rccc} R_n := P_n^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \ . \end{array}\right.}$$

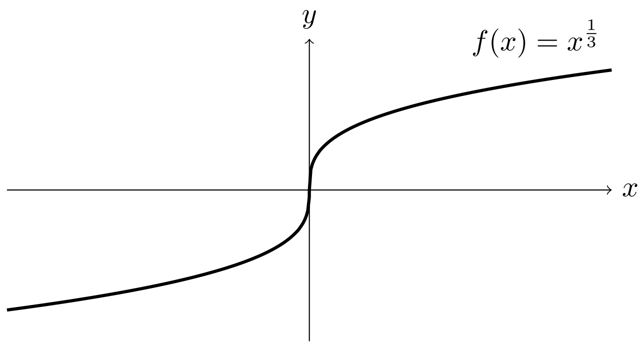
Propriétés.

- ◇ La fonction R_n est bijective, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ◇ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée

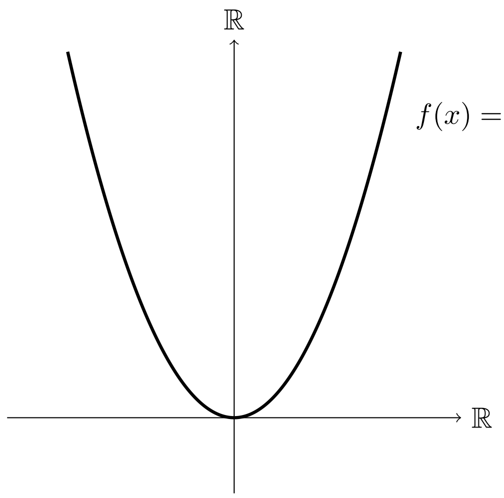
$$R_n'(x) = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}} x^{-1} \ .$$

Remarque. On aimerait tout de suite pouvoir écrire $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ et ainsi utiliser une version généralisée de la formule usuelle de la dérivée des fonctions à puissance entière $(x^n)' = nx^{n-1}$. Mais quel sens donner à l'expression $x^{\frac{1}{n}-1} = x^{\frac{n-1}{n}}$ car l'exposant est rationnel ? Nous allons traiter ce cas dans la prochaine section.

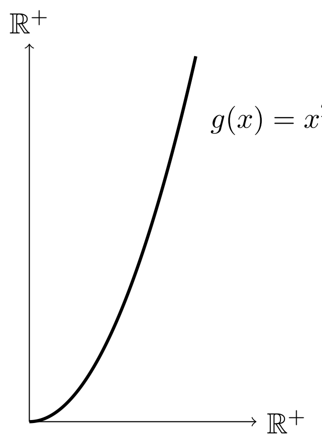
Le nombre dérivé n'existe que pour $x \neq 0$. En 0, R_n est continue, mais non dérivable. Cela se traduit dans ce cas par le fait que le graphe de R_n possède en $(0, 0)$ une tangente verticale.



$\diamond$ **Si** $n = 2k$ **est un entier naturel pair**, la fonction puissance P_n n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.



Mais si on la restreint et réduit à $\mathbb{R}^+$, on obtient alors une bijection strictement croissante continue de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.



Définition (Racine n^e, pour n entier naturel pair). La fonction réciproque de la fonction puissance P_n est la fonction *racine* n^e :

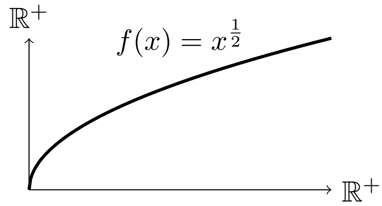
$$\boxed{\begin{cases} R_n := P_n^{-1} : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \ . \end{cases}}$$

Propriétés.

- ◇ La fonction R_n est bijective, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- ◇ Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée

$$R_n'(x) = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}} x^{-1} \ .$$

Mais elle n'est pas dérivable en 0, car son graphe admet au point $(0,0)$ une demi-tangente verticale.



Exercice. Tracer sur un même schéma l'allure des graphes de

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad y = \sqrt[4]{x} \ .$$

◇ **Si** $n =$ **est un entier négatif**, on procède de la même manière en excluant 0 de tous les ensembles considérés.

4.2.2 Exposant rationnel

Soit maintenant un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ quelconque. Il peut se mettre sous la forme $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Fonction puissance à exposant rationnel). On définit la *fonction puissance à exposant rationnel* par

$$\boxed{\begin{cases} P_r : & \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*} \\ & x \mapsto x^r := (x^p)^{\frac{1}{q}} \ . \end{cases}}$$

Proposition 31.

- ◇ *La fonction puissance à exposant rationnel est bien définie, c'est-à-dire*

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{p'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

pour $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ *avec* $p' = ap$ *et* $q' = aq$ *où* $a \in \mathbb{N}$.

◇ *Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a*

$$\boxed{x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p} \ . \tag{4.1}$$

Démonstration. — Pour le premier point, on regarde l'image des deux membres de l'égalité recherchée par la bijection $x \mapsto x^{aq}$. Pour le membre de gauche, on trouve :

$$\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)^{aq} = \left(\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^a = (x^p)^a = x^{ap}$$

Pour le membre de droite, on trouve :

$$\left((x^{ap})^{\frac{1}{aq}}\right)^{aq} = x^{ap} \ .$$

Le résultat étant le même, cela conclut la démonstration.
Pour le second point, on regarde l'image par la fonction bijective puissance q pour trouver

$$\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q = x^p \quad \text{et} \quad \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p = x^p \ .$$

□

Remarques.

◇ Supposons qu'on choisisse p et q de façon à ce que q soit impair (par exemple dans la forme irréductible de $r = \frac{p}{q}$), on peut étendre la définition ci-dessus à $x < 0$. En effet, la racine q^{e} est définie sur $\mathbb{R}$ lorsque q est impair, contrairement au cas q pair. Dans ce cas, la fonction puissance P_r est alors paire ou impaire, suivant que p est un nombre pair ou impair.

◇ Si $r = \frac{p}{q}$ est strictement positif, on a toujours $0^r = 0$. Ceci permet d'ajouter 0 à l'ensemble de définition de P_r quand $r > 0$.

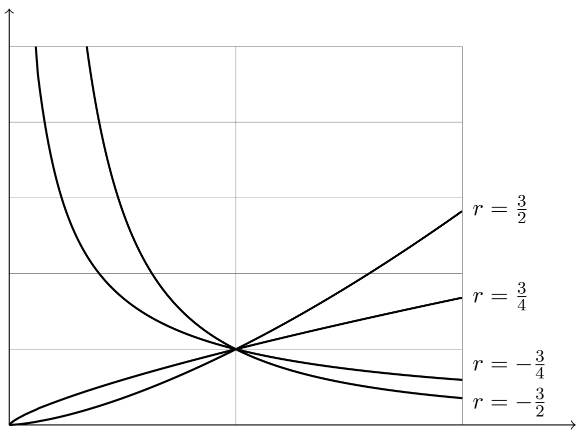


Figure 4.1 – Exemples de fonctions puissance $x \mapsto x^r$ à exposants rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec p impair et q pair.

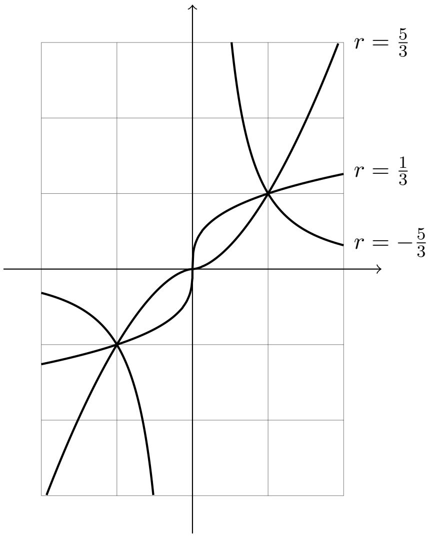


FIGURE 4.2 – Exemples de fonctions puissance $x \mapsto x^r$ à exposants rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec p impair et q impair.

EXERCICE. Représenter dans un même repère les graphes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{3}{5}}$ et $x \mapsto x^{\frac{5}{3}}$. On précisera la parité de ces fonctions, on étudiera leur dérivabilité en 0, et on précisera la tangente au graphe au point $(0,0)$.

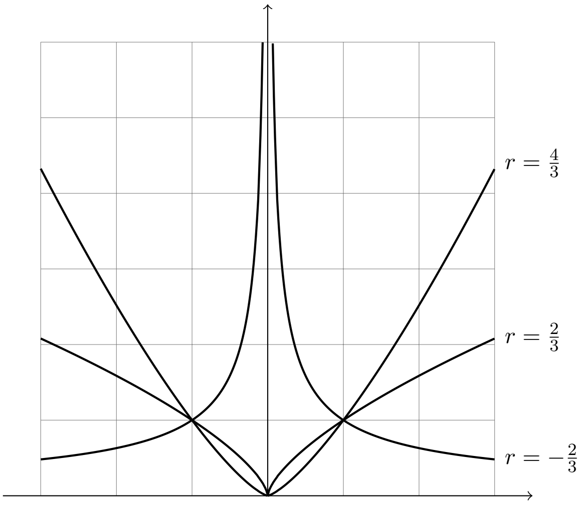


FIGURE 4.3 – Exemples de fonctions puissance $x \mapsto x^r$ à exposants rationnels $r = \frac{p}{q}$ avec p pair et q impair.

EXERCICE. Représenter dans un même repère les graphes des fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ et $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$. On précisera la parité de la deuxième fonction, on étudiera leur dérivabilité en 0, et on précisera la tangente (ou demi-tangente) au graphe au point $O(0,0)$.

Propriétés. Soient a et b deux nombres rationnels. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ (voire pour $x \in \mathbb{R}$ dans certains cas), on a

$$\boxed{\begin{aligned} x^a\, x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} \\ (x^a)' &= a x^{a-1}. \end{aligned}}$$

Démonstration. — Dans chacun des cas, il suffit de revenir à la définition ; cette démonstration est donc laissée au lecteur-trice comme un bon exercice. □

Remarques.

- ◇ Ces formules ne font qu'étendre aux exposants rationnels les propriétés déjà connues pour les exposants entiers.
- ◇ La fonction puissance P_a n'est dérivable en 0 (ou dérivable à droite en 0 suivant le cas) que si $a \geq 1$.
- ◇ Remarquez que la dernière formule est celle que nous voulions écrire depuis quelques pages.

4.2.3 Puissances à exposant réel

Pour définir des puissances a^b à exposant réel $b \in \mathbb{R}$, nous utilisons la fonction exponentielle de base a vue au chapitre précédent.

Définition (Quantité a^b). Soit a un réel strictement positif et soit b un réel quelconque. On note a^b la quantité $\exp(b \ln a)$:

$$\boxed{a^b := e^{b \ln a}}\ .$$

Exercice. Vérifier qu'on a toujours les égalités

$$\boxed{a^{b+c} = a^b\, a^c, \quad a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}}\ .$$

On peut alors étudier deux types de fonctions :

- ◇ ou bien a est fixé, b varie, et on étudie la fonction $x \mapsto a^x$, appelée *fonction exponentielle à base a*, ce qui a été fait au chapitre précédent.
- ◇ ou bien b est fixé, a varie, et on étudie la fonction $x \mapsto x^b$, appelée *fonction puissance d'exposant b*, ce qui est le but de cette section.

Définition (Fonction puissance à exposant réel). On définit la *fonction puissance à exposant réel $r \in \mathbb{R}$* par

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{llll} P_r : & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \mapsto & x^r := e^{r \ln x}\ . \end{array} \right.}$$

Proposition 32. *Pour tout exposant rationnel $r \in \mathbb{Q}$, cette définition coïncide avec celle donnée à la section précédente pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Démonstration. — Posons $r = \frac{p}{q}$ et calculons dans les deux cas la composée avec la fonction $x \mapsto x^q$, on trouve respectivement

$$\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q = x^p \quad \text{et} \quad \left(e^{\frac{p}{q}\ln x}\right)^q = e^{q\frac{p}{q}\ln x} = e^{p\ln x} = x^p \ ,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Propriétés. Pour tout $r, s \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} 1^r &= 1 \\ x^r\, x^s &= x^{r+s} \\ \frac{x^r}{x^s} &= x^{r-s} \\ (x^r)^s &= x^{rs} \\ (x^r)' &= r x^{r-1}. \end{aligned}}$$

Démonstration. — Dans chacun des cas, il suffit de revenir à la définition et d'utiliser les propriétés de la fonction exponentielle vues au chapitre précédent. □

Remarque. Ces formules ne font qu'étendre à $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et aux exposants réels les propriétés déjà connues pour les exposants rationnels x^r, $r \in \mathbb{Q}$. En particulier, l'avant-dernière égalité montre que pour un réel r non nul, la fonction réciproque de la fonction puissance $x \mapsto x^r$ est la fonction puissance $x \mapsto x^{\frac{1}{r}}$.

Pour ce qui est des limites :
- ◇ si $r > 0$, on a $x^r \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $x^r \to 0$ quand $x \to 0^+$,
- ◇ si $r < 0$, on a $x^r \to 0^+$ quand $x \to +\infty$ et $x^r \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.

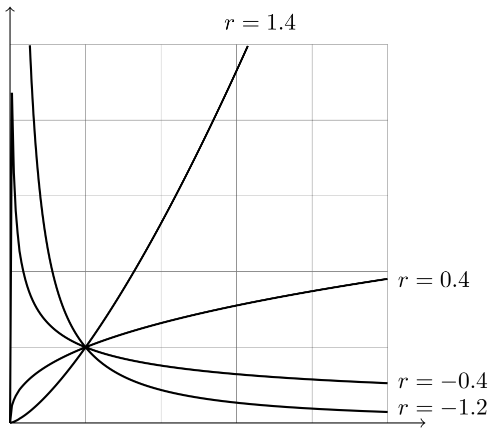


Figure 4.4 – Exemples de fonctions puissance à exposant réel.

Exercice. Supposons que $0 < r < s$; comparer x^r et x^s suivant les valeurs de x.

Proposition 33. (Croissances comparées) *Pour tout réel $r > 0$, on a*

$$\boxed{\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \qquad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \lim_{x\mapsto 0^+} x^r \ln x = 0} \ .$$

DÉMONSTRATION. — Montrons d'abord la première limite. Posons $n = \mathrm{E}(r) + 1$, la partie entière de r plus 1. Pour tout $x > 1$, on a donc $0 < x^r < x^n$ et ainsi $\dfrac{e^x}{x^n} < \dfrac{e^x}{x^r}$. On conclut ensuite en utilisant la proposition 22 du troisième chapitre. Les deux autres limites s'obtiennent en posant $y/r = \ln x$. □

4.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente ne sont pas bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et n'admettent donc pas globalement de fonctions réciproques. Mais pour chacune de ces fonctions, on peut trouver un intervalle, le plus grand possible, sur lequel la restriction de la fonction considérée est bijective. Par commodité, on choisira un intervalle contenant la valeur 0. On peut alors définir ce qu'on appelle les *fonctions trigonométriques réciproques* (ou fonctions circulaires réciproques).

4.3.1 Fonction Arc sinus

La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue et strictement croissante de -1 à 1. Cette application est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

Définition (Fonction Arc sinus). On définit la *fonction Arc sinus*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{cccc} \mathrm{Arcsin}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \mathrm{Arcsin}\, x\ . \end{array}\right.}$$

comme la fonction réciproque de

$$\left\{\begin{array}{cccc} \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \sin x\ . \end{array}\right.$$

Elle est donc caractérisée par

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \quad y = \mathrm{Arcsin}\, x \Leftrightarrow \left(x = \sin y \text{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)}\ .$$

On pourra retenir :
« $\mathrm{Arcsin}\, x$ **est l'arc (l'angle), compris entre** $\frac{\pi}{2}$ **et** $-\frac{\pi}{2}$**, dont le sinus vaut** x » .

Propriétés. La fonction Arcsin est une bijection, strictement croissante, impaire et continue de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

REMARQUE. On retiendra en particulier les valeurs

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}\,(0) = 0, \quad \mathrm{Arcsin}\,(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arcsin}\,(-1) = -\frac{\pi}{2}}\ .$$

ATTENTION. On a bien $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mais $\frac{5\pi}{6}$ n'appartient pas à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. **Donc** $\mathrm{Arcsin}\,(\frac{1}{2})$ **n'est pas égal à** $\frac{5\pi}{6}$.

Par contre, on a aussi $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, et cette fois-ci $\frac{\pi}{6}$ appartient bien à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc ici $\mathrm{Arcsin}\,(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

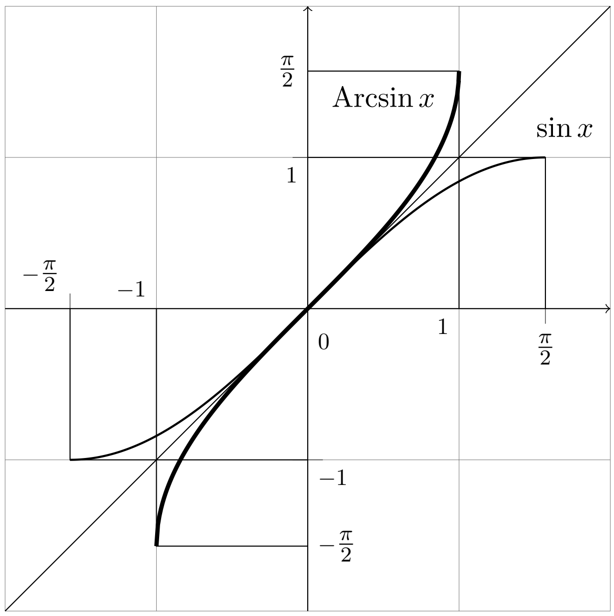


FIGURE 4.5 – Les fonctions sinus et Arc sinus

4.3.2 Fonction Arc cosinus

De la même manière, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ est continue et strictement décroissante de 1 à -1. Cette application est donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition (Fonction Arc cosinus). On définit la *fonction Arc cosinus*

$$\boxed{\begin{cases} \text{Arccos} : & [-1, 1] & \to & [0, \pi] \\ & x & \mapsto & \text{Arccos}\, x\ . \end{cases}}$$

comme la fonction réciproque de

$$\begin{cases} \cos_{|[0,\pi]} : & [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ & x & \mapsto & \cos x\ . \end{cases}$$

Elle est donc caractérisée par

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad y = \text{Arccos}\, x \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi])}\ .$$

On pourra retenir
« Arccos x **est l'arc (l'angle), compris entre** 0 **et** π**, dont le cosinus vaut** x » .

Propriétés. La fonction Arccos est une bijection, strictement décroissante et continue de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

REMARQUE. On retiendra en particulier les valeurs

$$\boxed{\text{Arccos}\,(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arccos}\,(1) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arccos}\,(-1) = \pi}\ .$$

ATTENTION. On a bien que $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ont tous les deux un cosinus égal à 0. **Mais comme seul** $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$**, on a** Arccos $0 = \frac{\pi}{2}$.

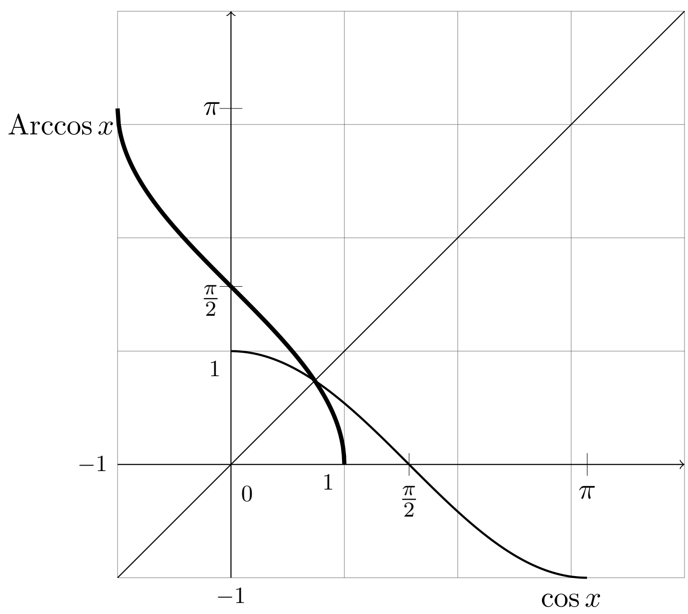


FIGURE 4.6 – Les fonctions cosinus et Arc cosinus

4.3.3 Fonction Arc tangente

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition (Fonction Arc tangente). On définit la *fonction Arc tangente*

$$\boxed{\begin{cases} \text{Arctan} : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & \text{Arctan}\, x \ . \end{cases}}$$

comme la fonction réciproque de

$$\begin{cases} \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan x \ . \end{cases}$$

Elle est donc caractérisée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \text{Arctan}\, x \Leftrightarrow \left(x = \tan y \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)} \ .$$

On pourra retenir
« $\text{Arctan}\, x$ **est l'arc (l'angle), compris entre** $-\frac{\pi}{2}$ **et** $\frac{\pi}{2}$**, dont la tangente vaut** x » .

Propriétés. La fonction Arctan est une bijection, strictement croissante, impaire et continue de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

REMARQUE. On retiendra en particulier les valeurs

$$\boxed{\text{Arctan}\,(0) = 0, \quad \text{Arctan}\,(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \text{Arctan}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}}$$

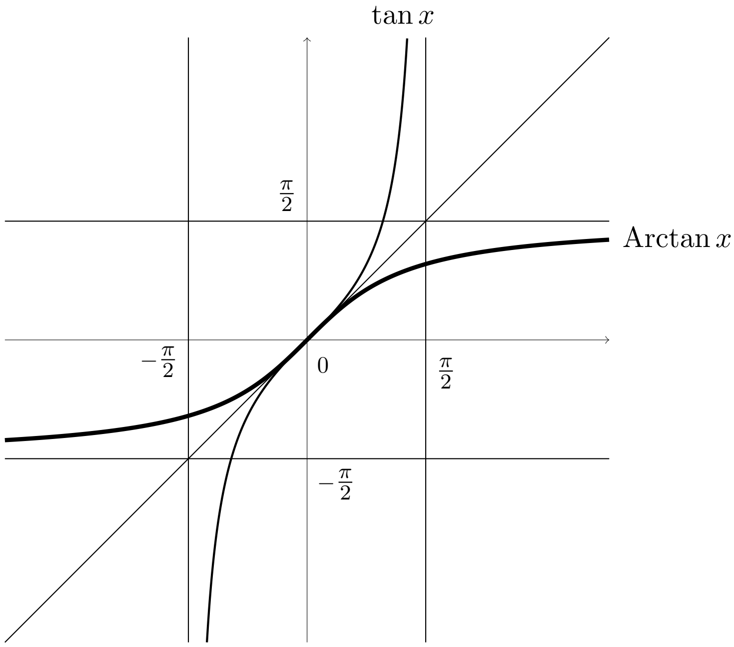


FIGURE 4.7 – Les fonctions tangente et Arc tangente

et les limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2}}\,.$$

EXERCICE.

1. Calculer $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{Arctan}(\sqrt{3})$ et $\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
2. Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires. Peut-on dire que la fonction Arccos est paire ?
3. Pour quelles valeurs de x les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(\sin x) &= x, \\ \sin(\operatorname{Arcsin} x) &= x, \\ \operatorname{Arccos}(\cos x) &= x, \\ \cos(\operatorname{Arccos} x) &= x. \end{aligned}$$

4.3.4 Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques

Proposition 34. *Les fonctions* Arcsin *et* Arccos *sont dérivables sur* $]-1,1[$ *avec pour dérivée*

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\,.$$

La fonction Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec pour dérivée*

$$\boxed{\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}}\,.$$

Démonstration. — Nous allons principalement appliquer la proposition 30. Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est dérivable, et sa dérivée ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. La fonction réciproque Arc sinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$. On voit qu'il en est de même de la fonction Arccos.
Soit $x \in]-1, 1[$ et soit $y = \operatorname{Arcsin} x$, donc $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \sin y$. Comme $\sin' y = \cos y$, la formule de dérivation d'une fonction réciproque donne

$$\operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\cos y} \ .$$

Mais comme $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos y > 0$, donc $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. On trouve bien la formule annoncée pour la dérivée de la fonction Arc sinus.
De la même manière, si $x \in]-1, 1[$ et $u = \operatorname{Arccos} x$, on a $x = \cos u$ et $u \in]0, \pi[$. Donc

$$\operatorname{Arccos}' x = \frac{1}{-\sin u} \ ,$$

et comme $u \in]0, \pi[$ implique $\sin u > 0$, on obtient $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2}$. D'où la formule pour la dérivée de la fonction Arc cosinus.

Par ailleurs, la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée ne s'annule jamais. Il en résulte que la fonction Arc tangente est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.
Enfin, soit $v = \operatorname{Arctan} x$, donc $x = \tan v$. On rappelle que $\tan' v = 1 + \tan^2 v$. On a donc

$$\operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1 + \tan^2 v} = \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

□

4.4 Exercices sur les fonctions réciproques de référence

Exercice 60. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
- ⋄ $f_1 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par $f_1(x) := \cos x$.
- ⋄ $f_2 : [2, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f_2(x) := \sqrt{x} - 1$.
- ⋄ $f_3 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ définie par $f_3(x) := \tan x$.
- ⋄ $f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_4(x) := x \sin x$.

Exercice 61. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to Y$ définie par

$$f(x) := 1 - x \text{ si } x \leq 2 \quad \text{et} \quad f(x) := 3x - 5 \text{ si } x > 2 \ .$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un ensemble Y à déterminer.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 62. Dans cet exercice, les fonctions f_i sont définies par l'expression $f_i(x) := \ln(x^2 + e)$.

1. Déterminer l'ensemble Y tel que $f_1 : \mathbb{R} \to Y$ soit surjective.
2. Trouver le plus grand intervalle I tel que $f_2 : I \to \mathbb{R}$ soit injective. Combien de choix a-t-on pour I ?
3. Trouver un ensemble X qui ne soit pas un intervalle et tel que $f_3 : X \to Y$ soit bijective. Combien de choix a-t-on pour X ?

Exercice 63. Démontrer que la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) := x^2 + 2x + 3$ réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur un ensemble Y à déterminer. Décrire sa fonction réciproque.

Exercice 64. Soit a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant $ad - bc > 0$ et $c \neq 0$ et soit $f(x) := \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

1. Déterminer l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression.
2. Calculer la dérivée de f, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, et établir le tableau de variations de f.
3. En déduire l'image $f(D)$ et justifier que f réalise une bijection de D dans $f(D)$.
4. Déterminer la bijection réciproque de f.

Exercice 65. On pose $f(x) := \sqrt[4]{x^3 - 11} - 2$.

1. Quel est l'ensemble de départ D de la fonction f associée à cette expression ?
2. Sans calculer la dérivée de f, trouver le sens de variation de f.
3. En déduire que f réalise une bijection de D sur un ensemble Y à déterminer.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire l'ensemble X tel que f réalise une bijection de X sur $[0, +\infty[$.

Exercice 66. Dériver les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ associées aux expressions suivantes et étudier le signe de leurs dérivées :

$$x \mapsto x^{1/x} \text{ et } x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} \ .$$

Exercice 67. Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(4,0)$, $B(4,2)$ et $C(3,3)$. Dessiner les triangles rectangles OAB et OBC. Montrer par un raisonnement géométrique que l'on a :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 68.

1. À l'aide de la dérivation, montrer que la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) := \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.
2. Retrouver ce résultat en utilisant la relation $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$.

Exercice 69. Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 70.

1. Pour quelles valeurs réelles de x a-t-on $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$?
2. Pour quelles valeurs réelles de x les expressions $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$ et $g(x) = \tan(\operatorname{Arctan} x)$ sont-elles définies ?
3. Tracer les graphes des fonctions f et g associées à ces expressions.

Exercice 71.

1. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) := \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$. En déduire une simplication de l'expression de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. Établir une relation entre $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ et $\tan y$, puis retrouver le résultat de la première question sans calculer la dérivée de f.

Exercice 72. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ par

$$f(x) := \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right).$$

En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$.

Exercice 73 (Extrait de l'examen 2008)**.**
On considère la fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, définie par $g(\theta) := \operatorname{Arcsin}(\sin(2\theta))$.

1. Calculer $g\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $g\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. Écrire une simplification de $g(\theta)$ selon que θ appartienne à $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ou $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Soit à présent la fonction numérique réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

   (a) Calculer $f(0)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.

   (b) On pose $\theta := \operatorname{Arctan} x$. Montrer que $\sin(2\theta) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(c) Déduire de ce qui précède une simplification de $f(x)$.

Exercice 74. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

Exercice 75. On considère la fonction f associée à l'expression$f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ? Calculer la dérivée et étudier son signe.
4. Étudier la dérivabilité à droite en 0.
5. Quel type de branche infinie possède la courbe représentative de f ?
6. Etablir le tableau de variations de f et tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 76. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \operatorname{Arctan} x + |x|$.

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
2. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f.
3. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée et établir le tableau de variations de f.
4. Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ de la courbe représentative de f, et leurs positions relatives par rapport à celle-ci.
5. Tracer la courbe représentative de f. On précisera les demi-tangentes au voisinage du point $(0, 0)$.

Chapitre 5

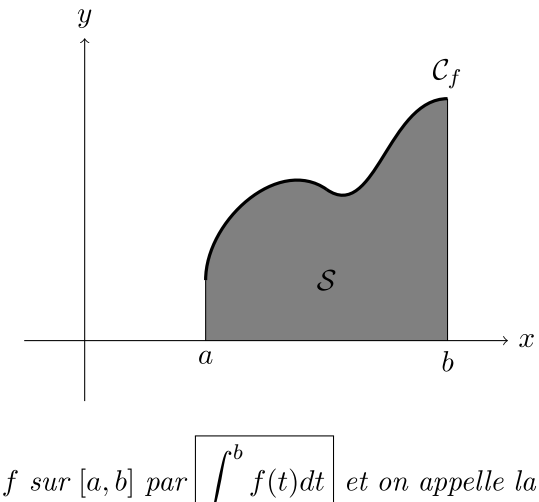
Intégration

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion d'*intégrale* d'une fonction à partir de la notion d'aire entre la courbe représentative et l'axe des abscisses. Les intégrales fournissent des primitives pour les fonctions continues, et reciproquement, le calcul des primitives permet de calculer des intégrales. Lorsque le calcul exacte d'une intégrale n'est pas possible, on peut tout de même en donner une approximation en approchant l'aire par des rectangles. Enfin, la notion d'intégrale permet de donner de bonnes approximations polynomiales pour les fonctions qui admettent des dérivées supérieures.

5.1 Intégrale des fonctions continues

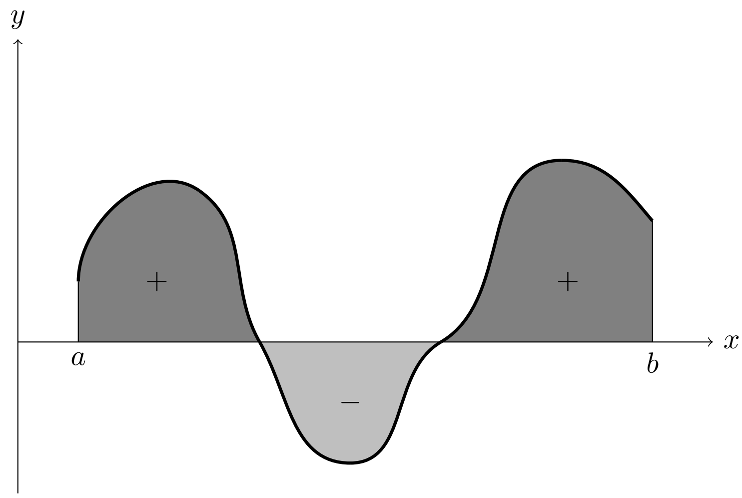
5.1.1 Définition géométrique de l'intégrale

≪ Définition≫ (Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné). *Pour toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ l'aire du domaine $\mathcal{S}$ délimité par les droites d'équations $y = 0$, $x = a$, $x = b$ et le graphe de f.*



On note l'intégrale de f sur $[a, b]$ par $\boxed{\int_a^b f(t)dt}$ *et on appelle la fonction f, l'intégrande.*

Lorsque f n'est pas positive sur $[a, b]$, l'idée est de définir l'intégrale sur $[a, b]$ comme la différence entre l'aire de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessus de l'axe des abscisses et celle de la partie de $\mathcal{S}$ située au-dessous de l'axe des abscisses.

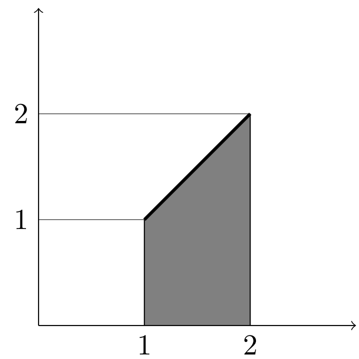


Attention. Cette « définition » n'est pas satisfaisante du point de vue de la rigueur mathématique. En effet, si la notion d'aire est bien connue pour certaines figures géométriques comme les carrés, les rectangles et les disques par exemple, que signifie « l'aire délimitée par une courbe quelconque» ? En fait, on définit cette notion par une intégrale ... Une première définition rigoureuse de la notion d'intégrale peut être donnée à l'aide des sommes de Riemann que nous aborderons à la section 5.4. Néanmoins, la « définition» donnée ici permet d'avoir une première idée intuitive sur ce qu'est une intégrale.

Remarque. Dans cette notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable « muette » , c'est-à-dire qu'on peut la remplacer à volonté par n'importe quelle autre notation. On a, par exemple :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Exemple. On a $\int_1^2 x\,dx = \frac{1+2}{2}(2-1) = \frac{3}{2}$ d'après la formule de l'aire d'un trapèze.



5.1.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 35. *L'intégrale vérifie les propriétés suivantes.*

1. *L'intégrale est linéaire :*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \textit{et} \quad \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

2. *Si f est positive sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
3. *Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.
4. *Si m et M vérifient $m \leqslant f(t) \leqslant M$, pour tout $t \in [a,b]$, alors*
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a) \qquad \textit{(Inégalité de la moyenne).}$$
5. *Pour tout $c \in]a,b[$, l'intégrale vérifie la relation de Chasles*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \ .$$
6. *L'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire*
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt \ .$$

« Démonstration» . — Ces propriétés sont vraisemblables avec la « définition » en terme d'aire.

1. Pour deux fonctions positives f et g, l'aire sous la courbe associée à la fonction $f+g$ est égale à la somme de l'aire sous la courbe associée à la fonction f et de l'aire sous la courbe associée à la fonction g. Pour une fonction positive f et une fonction négative g telles que $f \geqslant -g$, l'aire sous la courbe associée à la fonction $f+g$ est égale à la différence de l'aire sous la courbe associée à la fonction f avec l'aire au-dessus de la courbe associée à la fonction g. De manière générale, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en une union d'intervalles sur lesquels les deux fonctions f et g sont de signe constant.

   Pour le second point, l'aire d'une surface étirée d'un facteur λ vaut λ fois l'aire originelle.
2. Trivial avec cette « définition» .
3. L'inégalité $f(t) \leqslant g(t)$ est équivalente au fait que la fonction $g-f$ est positive. La propriété précédente et la linéarité de l'intégrale montrent que
$$\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (g(t)-f(t))\,dt \geqslant 0 \ .$$
4. C'est une application directe de la propriété précédente avec des fonctions constantes sachant que l'aire d'un rectangle de côté m et $b-a$ est égale à $m(b-a)$.
5. L'aire algébrique, c'est-à-dire comptée avec signe, délimitée par l'intervalle $[a,b]$ est égale à la somme de l'aire algébrique délimitée par l'intervalle $[a,c]$ avec l'aire algébrique délimitée par l'intervalle $[c,b]$.
6. Il suffit de découper l'intervalle $[a,b]$ en une union d'intervalles sur lesquels la fonction f est de signe constant, d'y appliquer la relation de Chasles et ensuite l'inégalité triangulaire.

□

Définition (**Convention**)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit par convention :

$$\boxed{\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_a^a f(t)\,dt := 0}\,.$$

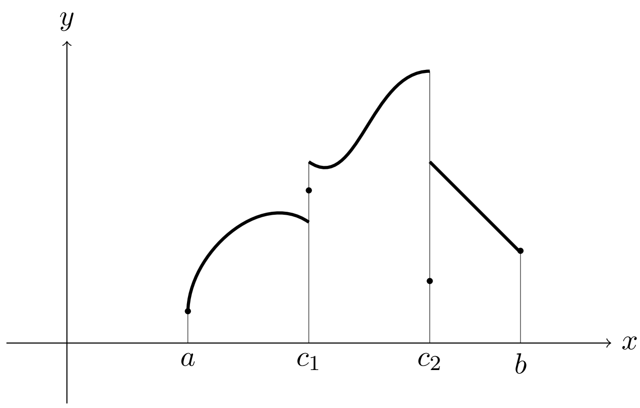
Le choix de ces conventions permet de généraliser la relation de Chasles de la façon suivante.

Proposition 36 (**Relation de Chasles**)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I fermé et borné de $\mathbb{R}$. Alors pour tous réels a, b et c dans I, on a*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt}\,.$$

5.1.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition (**Fonctions continues par morceaux**)**.** On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est *continue par morceaux* s'il existe un entier $N \geq 2$ et des nombres $c_1, c_2, \ldots, c_N$ vérifiant $a = c_1 < \cdots < c_N = b$, tels que f est continue sur chacun des intervalles $]c_i, c_{i+1}[$, pour $i = 1, \ldots, N-1$, et que les limites de f aux bornes de ces intervalles existent et soient finies.



Remarque. Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. Il suffit en effet de prendre $N = 2$.

Définition (**Intégrale d'une fonction continue par morceaux**)**.** Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, la fonction $f_i : [c_i, c_{i+1}] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_i(t) := \begin{cases} f(t) & \text{pour } t \in]c_i, c_{i+1}[\ , \\ \lim\limits_{x \to c_i^+} f(x) & \text{pour } t = c_i\ , \\ \lim\limits_{x \to c_{i+1}^-} f(x) & \text{pour } t = c_{i+1}\ , \end{cases}$$

est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la formule

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f_i(t)\,dt}\,.$$

Remarque. Cette définition s'inspire fortement de la relation de Chasles.

Lorsqu'une fonction est continue par morceaux, le découpage de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels la fonction est continue n'est pas unique ! On peut donc légitimement se demander si la définition de l'intégrale est bien fondée, c'est-à-dire si elle dépend ou non du découpage considéré.

Proposition 37. *La définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux ne dépend pas du découpage en sous-intervalles sur lesquels la fonction est continue.*

Démonstration. — Soient $a = c_1 < \cdots < c_N = b$ et $a = d_1 < \cdots < d_M = b$ deux découpages de l'intervalle $[a, b]$ et soient

$$\big\{f_i \ : \ [c_i, c_{i+1}] \to \mathbb{R}\big\}_{i=1,\ldots,N} \quad \text{et} \quad \big\{g_j \ : \ [d_j, d_{j+1}] \to \mathbb{R}\big\}_{j=1,\ldots,M}$$

des fonctions continues dont les valeurs coïncident avec celles de la fonction f sur l'intérieur de leurs intervalles de définition. On note

$$a = c_1 = d_1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_{N+M-3} < e_{N+M-2} = d_M = c_N = b$$

l'ensemble ordonné $\{c_1, \ldots, c_N\} \cup \{d_1, \ldots, d_M\}$ et on note

$$\big\{h_k \ : \ [e_k, e_{k+1}] \to \mathbb{R}\big\}_{k=1,\ldots,N+M-2}$$

les fonctions correspondantes associées à f. Avec les fonctions f_i, l'intégrale de la fonction f est donnée par

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f_i(t)\, dt = \sum_{k=1}^{N+M-3} \int_{e_k}^{e_{k+1}} h_k(t)\, dt \ ,$$

avec la relation de Chasles. Et avec les fonctions g_j, l'intégrale de la fonction f est donnée par

$$\sum_{j=1}^{M-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} g_j(t)\, dt = \sum_{k=1}^{N+M-3} \int_{e_k}^{e_{k+1}} h_k(t)\, dt \ .$$

Ces deux valeurs sont donc égales. □

Proposition 38. *Toutes les propriétés des intégrales des fonctions continues énoncées à la proposition 35 restent valables au niveau des intégrales des fonctions continues par morceaux.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le découpage de l'intervalle $[a, b]$ fourni dans la définition des fonctions continues par morceaux et d'appliquer sur chacun des sous-intervalles les propriétés de la proposition 35. □

5.1.4 Valeur moyenne et propriété de la moyenne

Définition (Valeur moyenne d'une fonction). Le nombre

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt}$$

est appelé *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a, b]$.

La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle est une valeur prise par la fonction f, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 17 (Théorème de la moyenne). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)\ .$$

Démonstration. — La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, par le théorème 9 de Weierstrass, il existe deux éléments u et v de $[a,b]$ tels que pour tout x dans $[a,b]$, on ait $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$. En intégrant cette inégalité on obtient
$$f(u)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant f(v)(b-a)$$
et donc
$$f(u) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant f(v)\ .$$
En appliquant le théorème des valeurs intermédaires, on obtient l'existence d'un élément $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. □

5.2 Primitives

5.2.1 Définition et propriétés

Définition (Primitive). Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Une *primitive* de la fonction f est une fonction numérique F définie et dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f, c'est-à-dire
$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pour} \quad x \in I\ .$$

Exemple. La fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de la fonction $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. En effet, $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$.

Existence : Toutes les fonctions numériques n'admettent pas des primitives, mais nous verrons plus loin que les fonctions continues en admettent.

Unicité : Lorsqu'une fonction admet une primitive F, on voit facilement que toute fonction du type $F + c$ où c est une constante réelle est encore une primitive : elle est dérivable et sa dérivée vaut $(F+c)' = F' = f$. La proposition suivante montre que toutes primitives sont de cette forme.

Proposition 39. *Si F est une primitive d'une fonction f numérique définie sur un intervalle I, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$ où c est une constante réelle.*

Démonstration. — Soient G une autre primitive de la fonction f sur l'intervalle I. On a alors $(G-F)' = f - f = 0$ sur I, donc la fonction $G - F$ est constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe une constance $c \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + c$. □

Remarque. On peut fixer la constante par une valeur prise par la primitive en un point. En effet, si $F(a) + c = d$, alors $c = d - F(a)$.

Exemples.

◇ On considère la fonction numérique F_1 définie par l'expression

$$F_1(x) := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ .$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$F_1'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ .$$

La fonction F_1 est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

◇ On considère la fonction numérique F_2 définie par l'expression

$$F_2(x) := \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| \ .$$

Cette fonction est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et sa dérivée vaut

$$F_2'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ .$$

La fonction F_2 est donc une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.

5.2.2 Primitives usuelles

FONCTIONS	INTERVALLES	PRIMITIVES
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \longmapsto \ln\|x\|$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \{\dots,-3,-2,\}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \neq -1$	$]0,+\infty[$	$x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \longmapsto e^x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \sin x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto -\cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \sin x$
$x \longmapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$	$x \longmapsto \tan x$
$x \longmapsto \tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$	$x \longmapsto -\ln\|\cos x\|$
$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}\, x$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$	$x \longmapsto \ln\|x+\sqrt{x^2-1}\|$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$]-\infty,+\infty[$	$x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

5.2.3 Relation entre intégrale et primitive

Théorème 18 (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction numérique définie sur I par l'expression*

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable et vérife $\Phi(a) = 0$ et $\Phi'(x) = f(x)$.

Démonstration. — On cherche à montrer que $\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$ tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0. La relation de Chasles nous donne l'égalité :

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \ .$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe un réel c_h tel que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)$$

avec $x \leqslant c_h \leqslant x+h$ ou $x+h \leqslant c_h \leqslant x$, selon que h soit positif ou négatif. Lorsque h tend vers 0, c_h tend donc vers x. Puisque f est continue en x, cela implique que lorsque h tend vers 0,

$$f(c_h) = \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$$

tend vers $f(x)$, ce qui achève la démonstration. □

Remarques.
- ◇ La fonction Φ est **la** primitive de f sur I qui s'annule au point a.
- ◇ Toute fonction continue sur un intervalle admet donc une primitive. Cette dernière est donnée par une intégrale.

5.2.4 Calcul intégral et primitive

Corollaire 40. *Toute primitive F d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ vérifie*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)} \ .$$

Démonstration. — Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$. On sait du théorème fondamental de l'analyse que la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule au point a. La fonction $F - \Phi$ est donc constante sur $[a,b]$. D'où $F(b)-\Phi(b) = F(a)-\Phi(a)$. Finalement, l'égalité $\Phi(a) = 0$ impose $F(b)-F(a) = \Phi(b)$, ce qui conclut la démonstration. □

Notation. On utilise souvent la notation : $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.

Ce résultat permet de ramener le problème du calcul d'intégrale à la recherche de primitive.

Exemple. La fonction Arc tangente est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. On a donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\operatorname{Arctan} x\big]_0^1 = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4}\ .$$

Proposition 41. *Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$ telle que son intégrale soit nulle, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction constante nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f = 0$.*

Démonstration. — On considère la primitive $\Phi \ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ de f qui s'annule en a. Puisque $\Phi'(x) = f(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in [a,b]$, alors la fonction Φ est croissante. De plus $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ donc Φ est la fonction nulle sur $[a,b]$; il en va de même pour sa dérivée f. □

5.3 Méthodes de calcul intégral

Nous avons vu à la section précédente que pour calculer une intégrale, il suffisait de trouver une primitive de la fonction à intégrer. Malheureusement, on ne connait pas toujours de primitive. Pour pallier ce problème, nous allons voir dans cette section, les deux outils principaux de calcul intégral que sont l'intégration par parties et la formule de changement de variable.

5.3.1 Intégration par parties

L'intégration par parties transforme l'intégrale d'un produit de deux fonctions en l'intégrale d'un produit de deux autres fonctions que l'on espère être plus facile à calculer. Elle est la forme intégrale de la formule de la dérivée du produit de deux fonctions.

Théorème 19 (Intégration par parties). *Toute paire f, g de fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a,b]$ vérifie*

$$\boxed{\int_a^b f'(t)g(t)dt = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt}\ .$$

Démonstration. — Le produit des deux fonctions f et g est dérivable et sa dérivée vaut $(fg)' = f'g + fg'$. En intégrant cette égalité entre a et b, on obtient la formule escomptée :

$$\int_a^b (fg)'(t)dt = \big[f(t)g(t)\big]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt\ .$$

□

Mode d'emploi. La fonction que l'on veut intégrer doit se présenter sous la forme du produit de deux fonctions. Il faut choisir celle que l'on doit dériver (la fonction g de la formule) et celle que l'on va intégrer (la fonction f' de la formule). Il faut bien choisir pour se ramener à une intégration plus simple à calculer. Notez que le choix de f se fait à une constante près.

EXEMPLES.

1. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^3 \ln t \, dt$.

   On considère l'intégrande comme un produit de fonctions en posant
$$\begin{cases} f'(t) := 1 \\ g(t) := \ln t \ . \end{cases}$$
   On obtient alors
$$\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{cases} ,$$
   ce qui donne
$$I = \int_1^3 \ln t \, dt = \big[t \ln t\big]_1^3 - \int_1^3 t \frac{1}{t} \, dt = 3 \ln 3 - \big[t\big]_1^3 = 3 \ln 3 - 2 \ .$$
   ⋄ Cette technique permet aussi de calculer les primitives de la fonction logarithme ln. Pour tout $x > 0$, on considère
$$\Phi(x) := \int_1^x \ln t \, dt \ .$$
   La même intégration par parties donne
$$\Phi(x) = \int_1^x \ln t \, dt = \big[t \ln t\big]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} \, dt = x \ln x - \big[t\big]_1^x = x \ln x - x + 1 \ .$$
   Les primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction logarithme ln sont donc les fonctions $x \longmapsto x \ln x - x +$ où c est une constante réelle.

2. Calculons l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)e^{-3x} \, dx$.

   On a intérêt à dériver le polynôme $2x - 1$ et à intégrer e^{-3x}. Posons donc
$$\begin{cases} f'(x) = e^{-3x} \\ g(x) = 2x - 1 \ . \end{cases}$$
   On obtient
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{3} \, e^{-3x} \\ g'(x) = 2 \end{cases} ,$$
   ce qui donne
$$\begin{aligned} J &= \left[(2x-1)\left(-\frac{1}{3} \, e^{-3x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2 \left(-\frac{1}{3} \, e^{-3x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \, e^{-3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3} \, e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{5}{9} \, e^{-3} - \frac{1}{9} \ . \end{aligned}$$
   ⋄ Plus généralement, on peut calculer les intégrale de la forme $J = \displaystyle\int_a^b P(t) e^{\alpha t} \, dt$ où P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel non nul en effectuant n intégrations

par parties. On procède de la façon suivante : en dérivant le polynôme et en intègrant l'exponentielle on obtient

$$J = \left[\frac{1}{\alpha} P(t) e^{\alpha t}\right]_a^b - \int_a^b P'(t) e^{\alpha t}\, dt \ .$$

On est ramené au calcul d'une intégrale du même type, mais avec un polynôme de degré $n-1$. Après n intégrations par parties du même type, on est ramené simplement au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha t}\, dt$.

3. Calculons l'intégrale

$$F(x) := \int_0^x e^{\alpha t} \sin(\beta t)\, dt \ ,$$

où α et β sont deux réels non nuls et x un réel quelconque.
On peut indifféremment dériver $e^{\alpha t}$ ou $\sin(\beta t)$. Posons par exemple

$$\begin{cases} f'(t) = e^{\alpha t} \\ g(t) = \sin(\beta t) \ . \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \\ g'(t) = \beta \cos(\beta t) \end{cases} ,$$

ce qui donne

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^x e^{\alpha t} \cos(\beta t)\, dt.$$

Nous sommes ramenés à une intégrale du même type avec un cosinus à la place du sinus. Nous faisons alors une seconde intégration par parties en choisissant la même fonction à dériver (fonction trigonométrique) et la même fonction à « primitiver » (exponentielle). Ceci de nous ramène pas au point de départ, mais donne :

$$F(x) = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t)\right]_0^x - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \underbrace{\int_0^x e^{\alpha t} \sin(\beta t)\, dt}_{=F(x)} \ .$$

En regroupant les termes $F(x)$, on trouve d'abord

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) F(x) &= \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin(\beta t)\right]_0^x - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos(\beta t)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2} \big(e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 1\big) \end{aligned}$$

puis au final

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2} \big(e^{\alpha x} \cos(\beta x) - 1\big)\right) \ .$$

5.3.2 Changement de variable

La formule de changement de variable transforme l'intégrale d'une fonction d'une variable sur un intervalle en une intégrale d'une autre fonction en une autre variable sur un autre intervalle et dont on espère être plus facile à calculer. Elle est la forme intégrale de la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Théorème 20 (Formule de changement de variable). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, de dérivée continue, avec $f([a, b]) \subset [c, d]$ et soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[c, d]$. On a alors*

$$\boxed{\int_a^b g(f(t))\, f'(t)\, dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du} \ .$$

DÉMONSTRATION. — Soit G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[c, d]$, avec laquelle on calcule l'intégrale :

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du = G(f(b)) - G(f(a)) \ .$$

D'autre part, la fonction $G \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée vaut :

$$(G \circ f)'(x) = g(f(x))\, f'(x) \ .$$

La fonction $G \circ f$ est donc une primitive de la fonction $x \mapsto g(f(x))f'(x)$. Et elle permet de calculer l'intégrale

$$\int_a^b g(f(t))\, f'(t)\, dt = G(f(b)) - G(f(a)) \ ,$$

d'où l'égalité recherchée. □

MODE D'EMPLOI . Lorsque l'on veut échanger l'intégrale de gauche en l'intégrale de droite plus simple, on effectue un changement de variable avec les quatre étapes suivantes.

- ◇ Remplacer $f(t)$ par u.
- ◇ Vérifier que la fonction f est dérivable à dérivée continue.
- ◇ Remplacer $f'(t)dt$ par du.
- ◇ Remplacer les bornes a et b par $f(a)$ et $f(b)$.

On applique cette méthode dans les deux premiers exemples suivants. Mais la formule de changement de variable peut aussi s'appliquer dans l'autre sens, voir l'exemple 3 ci-dessous.

EXEMPLES.

1. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\, dt$.
   On effectue le changement de variable $u := t^2$ d'où $du = 2tdt$. La fonction $f(t) = t^2$ est dérivable à dérivée continue. Lorsque $t = 0$, on a $u = 0$ et lorsque $t = 1$, on a $u = 1$. La formule de changement de variable donne alors

$$\int_0^1 \frac{t}{t^4+1}\, du \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\underbrace{t^4}_{u^2}+1}\, \underbrace{2tdt}_{du} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\big[\mathrm{Arctan}\,(u)\big]_0^1 = \frac{\pi}{8} \ .$$

2. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$.

   On effectue le changement de variable $u := e^t$ de sorte que $du = e^t dt$, c'est-à-dire $dt = \frac{du}{u}$. La fonction $f(t) = e^t$ est dérivable à dérivée continue. Lorsque $t = 0$, on a $u = 1$ et lorsque $t = 1$ et $u = e$. La formule de changement de variable donne alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{e^t+\frac{1}{e^t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{u+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int_1^e \frac{u}{u^2+1}\frac{du}{u} \\ &= \int_1^e \frac{1}{u^2+1}\,du = \big[\mathrm{Arctan}\,(u)\big]_1^e = \mathrm{Arctan}\,(e) - \frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

3. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

   On effectue le changement de variable $x = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $dx = \cos\theta d\theta$. La fonction $f(\theta) = sin\theta$ est dérivable à dérivée continue. Lorsque $x = 0$, on a $\theta = 0$, et lorsque $x = 1$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$. La formule de changement de variable donne alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

5.3.3 Exemple : intégration d'expressions trigonométriques

Pour calculer des intégrales du type

$$\int_a^b \sin^p t \cos^q t\,dt\ ,$$

où p et q sont des entiers, on distingue deux cas.

◇ Premier cas : lorsque p ou q est impair.

Lorsque p est impair, on effectue le changement de variable $u := \cos t$ et on obtient, en utilisant la formule $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, une expression de la forme

$$\int_a^b \sin t \cdot Q(\cos t)\,dt = -\int_{\cos a}^{\cos b} Q(u)\,du\ ,$$

où Q est une fonction polynômiale.

Lorsque q est impair, on effectue le changement de variable $u := \sin t$ pour obtenir une expression de la forme

$$\int_a^b \cos t \cdot Q(\sin t)dt = \int_{\sin a}^{\sin b} Q(u)du\ ,$$

où Q est une fonction polynômiale.

◇ **Deuxième cas : lorsque p et q sont pairs.**

On linéarise l'expression et on calcule l'intégrale de la formule linéarisée.

EXEMPLES.

1. Calculons une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^4 x \cos^3 x$.

   On va donc calculer la fonction $F(x) := \int_0^x \sin^4 t \cos^3 t \, dt$. Comme $q = 3$ est impair, nous sommes donc dans le premier cas et on effectue le changement de variable $u = \sin t$. On a $du = \cos t \, dt$ et

   $$\sin^4 t \cos^3 t = \sin^4 t(1 - \sin^2 t) \cos t = Q(\sin t) \cos t$$

   avec $Q(u) = u^4(1 - u^2) = u^4 - u^6$. On obtient au final

   $$F(x) = \int_0^{\sin x} (u^4 - u^6) \, du = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} \ .$$

2. Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$.

   Comme les deux exposants sont pairs, on linéarise l'expression $\cos^2 t \sin^2 t$:

   $$\cos^2 t \sin^2 t = \frac{1}{4} \sin^2 2t = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t) \ .$$

   Ceci donne au final

   $$I = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) \, dt = \frac{1}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} \ .$$

REMARQUE. La méthode de linéarisation est valable dans tous les cas mais la méthode préconisée quand l'un des exposants est impair est beaucoup plus rapide.

5.4 Calcul numérique des intégrales

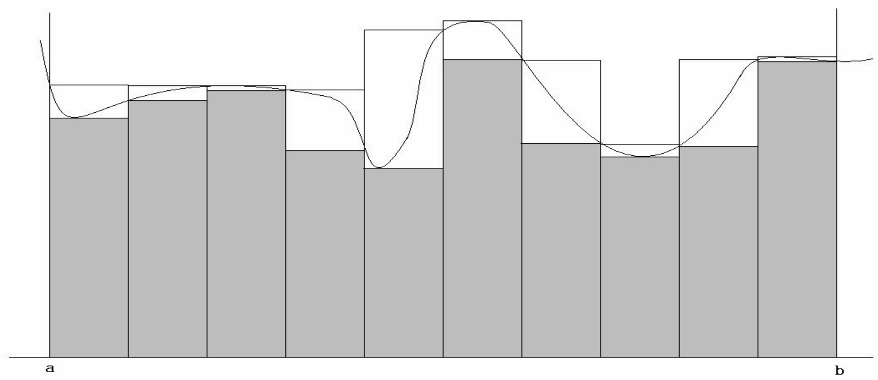
Lorsque l'on ne sait pas calculer algébriquement la valeur exacte d'une intégrale, par exemple avec les méthodes précédentes, on peut néanmoins essayer d'en trouver une valeur numérique approchée. Pour cela, on peut donner une approximation de l'aire définie par la courbe représentative à l'aide de rectangles.

5.4.1 Cas général

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On essaie de donner une approximation numérique de la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$, c'est-à-dire de l'aire de la surface délimitée par les droites $y = 0$, $x = a$, $x = b$ et le graphe de f.
Pour cela, on peut encadrer cette aire par des sommes finies d'aires de rectangles comme suit. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b - a}{n}$:

$$I_i := \left[a + i\frac{b - a}{n}, \, a + (i + 1)\frac{b - a}{n} \right], \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n - 1 \ .$$

La fonction f étant continue sur chacun des intervalles I_i, elle y admet un minimum m_i et un maximum M_i par le théorème des valeurs intermédiaires.



Alors l'aire délimitée par la courbe de la fonction f est comprise la somme $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{b-a}{n}$ des aires des rectangles dont la hauteur est le minumum m_i (en gris sur la figure) et la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{b-a}{n}$ des aires des rectangles dont la hauteur est le maximum M_i (en blanc sur la figure) :

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i = S_n \ .$$

De manière générale, on peut toujours définir les minima m_i, les maxima M_i et donc les sommes s_n et S_n lorsque f n'est pas nécessairement positive sur $[a, b]$. Dans ce cas, l'inégalité ci-dessus tient toujours.

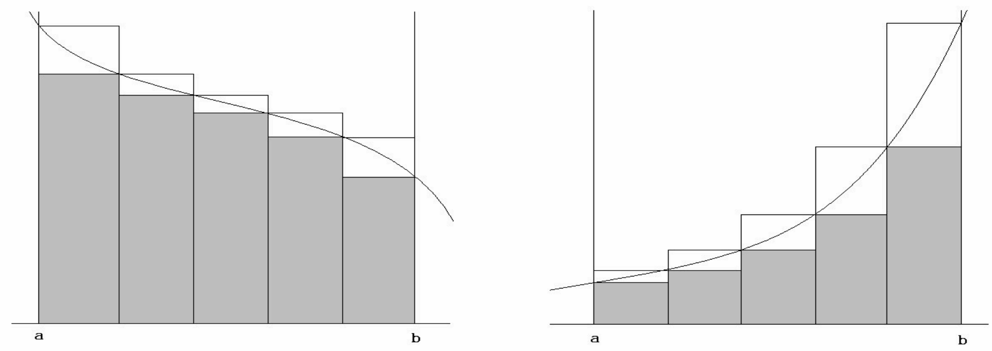
Proposition 42. *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et soient les minima $m_i := min_{I_i} f$ et les maxima $M_i := max_{I_i} f$. L'intégrale de f vérifie l'encadrement*

$$\boxed{s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i = S_n} \ .$$

Remarque. Les sommes s_n et S_n sont appelées des *sommes de Riemann.* En fait, une manière rigoureuse de définir la notion d'intégrale est de le faire avec la limite des sommes de Riemann lorsque n tend vers l'infini. En effet, lorsque la fonction f est continue, on peut montrer que s_n et S_n tendent vers une même limite.

5.4.2 Cas des fonctions monotones

Lorsque la fonction f est monotone sur l'intervalle $[a, b]$, le calcul des minima m_i et des maxima M_i est particulièrement simple : ils sont donnés par la valeur prise par la fonction à un bord des intervalles I_i. On peut alors en déduire la valeur exacte des sommes de Riemann et surtout donner une estimation la marge d'erreur.



Si la fonction f est croissante sur $[a, b]$, le calcul des minima m_i et des maxima M_i est donné par :

$$m_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad M_i = f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) .$$

La formule des sommes de Riemann est alors

$$\boxed{s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)} .$$

L'avantage principal de ce cas de figure est l'estimation suivante de la marge d'erreur :

$$\boxed{S_n - s_n = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))} .$$

De la même manière, si la fonction f est décroissante sur $[a, b]$, le calcul des minima m_i et des maxima M_i est donné par :

$$m_i = f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad M_i = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) .$$

La formule des sommes de Riemann est alors

$$\boxed{s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)}$$

On en déduit le même type de formule pour la marge d'erreur $\boxed{S_n - s_n = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))}$.

La proposition suivante résume cette discussion.

Proposition 43. *Tout fonction f continue et monotone sur l'intervalle $[a, b]$ vérifie les inégalités*

$$\boxed{s_n \leq \int_a^b f(t)dt \leq S_n} ,$$

où l'amplitude de l'encadrement vaut

$$\boxed{S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\left|f(b) - f(a)\right|} .$$

Remarque. Puisque $\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, l'encadrement peut être rendu aussi précis que l'on veut, pourvu que n soit assez grand.

5.4.3 Exemple de calcul numérique d'une intégrale

Essayons d'appliquer la méthode précédente des rectangles au calcul approché de l'intégrale

$$I := \int_0^1 e^{-x^2} dx .$$

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et décroissante sur $[0,1]$. Comme

$$(1-0)|e^{-1} - e^0| \sim 0,6 ,$$

si l'on veut approximer I à 10^{-2} près il suffit de prendre $n = 100$. On obtient avec une machine

$$s_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} e^{-k^2/100^2} \sim 0,7436 \quad \text{et} \quad S_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} e^{-k^2/100^2} \sim 0,7499$$

On obtient donc l'encadrement suivant

$$\boxed{0,743 < s_{100} \leqslant I \leqslant S_{100} < 0,750}$$

dont l'amplitude est 7.10^{-3}.

5.5 Formule de Taylor avec reste intégral

Si une fonction est très régulière, c'est-à-dire si elle est dérivable plusieurs fois, on peut l'approcher par une fonction polynomiale avec une formule explicite pour le terme d'erreur donné par une intégrale. C'est ce que l'on appelle la *formule de Taylor avec reste intégral.*

5.5.1 Formule de Taylor à l'ordre 0

Définition (Fonction de classe C^1). Une fonction *de classe* C^1 est une fonction dérivable à dérivée continue.

Proposition 44 (Formule de Taylor à l'ordre 0). *Toute fonction f de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ vérifie l'égalité*

$$\boxed{f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt} .$$

Démonstration. — Il s'agit d'une simple application du théorème fondamental de l'analyse. □

Remarques.

- ◇ Le même raisonnement tient pour tout $x \in [a, b]$ et donne
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \ .$$
Ceci permet de déterminer $f(x)$ si on connait $f(a)$ et f' sur $[a, x]$.
- ◇ Cette formule permet de retrouver le sens de variation de f connaissant le signe de la dérivée f'.
- ◇ L'application du théorème de la moyenne permet de retrouver la conclusion du théorème des accroissements finis. Mais ici on a supposé la condition plus forte f' continue sur $[a, b]$.
- ◇ On retrouve également l'inégalité des accroissements finis avec l'inégalité de la moyenne.

5.5.2 Formule de Taylor à l'ordre 1

Définition (Fonction de classe C^2). Une fonction *de classe* C^2 est une fonction deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.

Proposition 45 (Formule de Taylor à l'ordre 1). *Toute fonction f de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ vérifie l'égalité*
$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\, dt} \ .$$

Démonstration. — Une application de la formule d'intégration par parties donne
$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_a^b f'(t)\, dt = \big[-(b-t)f'(t)\big]_a^b + \int_a^b (b-t)f''(t)\, dt \\ &= (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\, dt \ . \end{aligned}$$
□

Remarques.

- ◇ Le même raisonnement tient pour tout $x \in [a, b]$ et donne
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\, dt \ .$$
Ceci permet de déterminer $f(x)$ si on connait $f(a)$, $f'(a)$ et f'' sur $[a, x]$.
- ◇ Si la dérivée seconde f'' est positive sur $[a, b]$, on retrouve l'inégalité
$$f(b) \geqslant f(a) + (b-a)f'(a) \ ,$$
c'est-à-dire que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Corollaire 46. *Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ et soit $|f''| \leq M$ une majoration de la valeur absolue de la dérivée seconde sur l'intervalle $[a, b]$. L'écart entre la courbe représentative de f et sa tangente en un point est majoré par*
$$\boxed{\big|f(b) - (f(a) + (b-a)f'(a))\big| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2}} \ .$$

Démonstration. — La formule de Taylor à l'ordre 1 donne

$$\begin{aligned}\left|f(b)-(f(a)+(b-a)f'(a))\right| &= \left|\int_a^b (b-t)f''(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b (b-t)\left|f''(t)\right|\,dt\\ &\leqslant M\int_a^b (b-t)\,dt \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2}\ .\end{aligned}$$

□

Remarque. La valeur absolue de la dérivée seconde d'une fonction de classe C^2 est toujours majorée. En effet, l'application $|f''|$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et le théorème de Weierstrass dit que son image est un intervalle fermé borné.

Exemple. Si on applique ce corollaire de la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction sinus de classe C^1, on obtient :

$$|\sin x - x| \leqslant \frac{x^2}{2}\ ,$$

car $|(\sin x)''| = |\sin x| \leqslant 1$.

5.5.3 Cas général

On peut généraliser les formules ou inégalités obtenues précédemment de la manière suivante.

Définition (Fonction de classe C^n). Une fonction *de classe C^n* est une fonction n-fois dérivable et dont la dérivée n^{e} est continue.

Théorème 21 (Formule de Taylor avec reste intégral). *Toute fonction Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^n vérifie*

$$\boxed{f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt}\ .$$

Démonstration. — On démontre ce résultat par récurrence en faisant une intégration par parties. □

Corollaire 47 (Inégalité de Taylor–Lagrange). *Soit f une fonction de classe C^n sur l'intervalle $[a,b]$ et soit $|f^{(n)}|\leq M$ une majoration de la valeur absolue de la dérivée n^{e} sur l'intervalle $[a,b]$. La fonction f vérifie l'inégalité de Taylor–Lagrange :*

$$\boxed{\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant M\,\frac{(b-a)^n}{n!}}\ .$$

Démonstration. — On majore le reste dans la formule de Taylor de la manière suivante

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(t)\right|\,dt\leqslant\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}M\,dt\\ &= M\,\frac{(b-a)^n}{n!}\ .\end{aligned}$$

□

Exemple. Soit l'intervalle $[a,b]=[0,1]$ et soit la fonction $f(x)=e^x$ qui est de classe C^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout x dans $[0,1]$, on a

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|e^x\right| \leq e, \quad f^{(k)}(0)=e^0=1 \quad \text{et} \quad f(1)=e\ .$$

L'inégalité de Taylor–Lagrange s'écrit donc

$$\left|e-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{e}{n}\ .$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on en déduit la formule

$$\boxed{e=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}\ .$$

Exercice. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la constante d'Euler e.

5.6 Épilogue : Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans cette dernière section, nous allons utiliser les primitives pour résoudre les premières équations différentielles : *les équations différentielles linéaires du premier ordre.*

5.6.1 Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient a et b des fonctions continues sur I.

Définition (Équation différentielle linéaire du premier ordre). On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation (E) de la forme :

$$(E) \qquad \boxed{y'(x)=a(x)y(x)+b(x)}\ .$$

On appelle *solution de l'équation* (E) sur I une fonction φ dérivable sur I, telle que :

$$\varphi'(x)=a(x)\varphi(x)+b(x), \quad \forall\, x\in I\ .$$

Proposition 48. *Toute solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est de classe C^1.*

Démonstration. — Soit φ une solution de l'équation différentielle (E). Comme sa dérivée est égale à $\varphi'(x)=a(x)\varphi(x)+b(x)$ qui est une fonction continue, elle est de classe C^1. □

5.6.2 Équation différentielle linéaire homogène

Définition (Équation différentielle linéaire homogène). On dit qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre est *homogène* lorsque la fonction b est nulle, $b = 0$.

Toute équation différentielle linéaire du premier $(E)\ :\ y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ induit une équation différentielle linéaire homogène en omettant le dernier terme :

$$(H) \qquad y'(x) = a(x)y(x)\ .$$

On peut déjà résoudre cette équation plus simple.

Théorème 22 (Solutions des équations différentielle linéaires homogènes). *Les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme*

$$\boxed{\varphi(x) = c\, e^{A(x)}}\ ,$$

où c est une constante réelle et où A est une primitive de la fonction a sur l'intervalle I, par exemple

$$A(x) = \int_\alpha^x a(t)dt\ .$$

Démonstration. — On vérifie dábord que $e^{A(x)}$ est solution de l'équation homogène (H) :

$$\left(e^{A(x)}\right)' = a(x)e^{A(x)}\ .$$

Ensuite on considère une solution φ de de l'équation homogène (H) et on procède au changement de fonction inconnue, en posant $z(x) := \varphi(x)e^{-A(x)}$, c'est-à-dire $\varphi(x) = z(x)e^{A(x)}$. La dérivée de la fonction φ est

$$\varphi'(x) = z'(x)\, e^{A(x)} + z(x)\, a(x)\, e^{A(x)}\ .$$

En remplaçant dans l'équation (H), on obtient :

$$z'(x)\, e^{A(x)} + z(x)\, a(x)\, e^{A(x)} = a(x)\, z(x)\, e^{A(x)}\ ,$$

ce qui donne $z'(x)\, e^{A(x)} = 0$, puis $z'(x) = 0$. La fonction z est donc égale à une constante $c \in \mathbb{R}$. Soit au final $\varphi(x) = c\, e^{A(x)}$. □

Remarque. Comme les solutions dépendent d'une constante c, il y a donc une infinité. Cette constante peut-être déterminée par une valeur prise en un certain point par la fonction solution.

5.6.3 Cas général

Revenons à l'équation l'équation différentielle linéaire complète

$$(E) \qquad y' = a(x)y + b(x)\ .$$

La proposition suivante donne la forme générale de ses solutions lorsque l'on en connait une particulière.

Théorème 23 (Solutions des équations différentielle linéaires). *Soit φ_0 une solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle (E). Les solutions sur I de l'équation (E) sont de la forme*

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi_0(x) + c\, e^{A(x)}}\ .$$

où c est une constante réelle et où A une primitive de a sur I.

Démonstration. — Soit φ_0 une solution particulière de l'équation différentielle (E). Soit φ une éventuelle autre solution. Les fonctions φ_0 et φ étant solutions de (E), elles vérifient

$$\varphi_0'(x) = a(x)\varphi_0(x) + b(x) \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\ .$$

Par soustraction, on obtient

$$(\varphi' - \varphi_0')(x) = a(x)(\varphi - \varphi_0)(x)\ .$$

Par conséquent, $\varphi - \varphi_0$ est solution de l'équation homogène $(H) : y'(x) = a(x)y(x)$.
On déduit du théorème 22 que $(\varphi - \varphi_0)(x) = c\, e^{A(x)}$, où $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I. Au final, $\varphi(x) = \varphi_0(x) + c\, e^{A(x)}$, où c est une constante réelle. □

Définition. Cette famille de solutions est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle. Une solution qui correspond à une valeur donnée de c est appelée une *solution particulière* de l'équation différentielle.

Ce théorème montre que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.

Remarque. Encore une fois, l'équation différentielle (E) admet une infinité de solutions, qui dépendent des valeurs de la constante $c \in \mathbb{R}$.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = e^x\ .$$

Cette équation est de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ avec $a(x) = -1$ et $b(x) = e^x$.

- ◇ La fonction $A(x) = -x$ étant une primitive de $a(x)$, l'équation homogène associée a pour solution générale $y(x) = c\, e^{-x}$, où c est une constante réelle.
- ◇ Il est clair que $\varphi_0(x) = \dfrac{e^x}{2}$ est une solution particulière de l'équation complète.

Par conséquent, la solution générale de cette équation est

$$\varphi(x) = c\, e^{-x} + \frac{e^x}{2}\ .$$

5.6.4 Méthode de variation de la constante

Il n'est pas toujours évident de deviner une solution particulière de l'équation homogène associée. Pour en trouver une, on peut appliquer la *méthode de variation de la constante* qui suit.

- ◇ On commence par résoudre l'équation homogène associée. La solution générale de cette équation est de la forme $c\, e^{A(x)}$.

- $\diamond$ On fait le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x)\ e^{A(x)}$. La dérivée de la fonction y vaut donc
$$y'(x) = z'(x)\ e^{A(x)} + z(x)\ a(x)\ e^{A(x)}\ .$$
En remplaçant dans (E), on obtient :
$$z'(x)\, e^{A(x)} + z(x)\, a(x)\, e^{A(x)} = a(x)\, z(x)\, e^{A(x)} + b(x)\ ,$$
ce qui implique
$$z'(x)\, e^{A(x)} = b(x) \quad \text{et donc} \quad z'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}\ .$$
On s'aperçoit donc que, pour trouver la fonction z , il suffit de calculer une primitive $F(x)$ de la fonction $b(x)\, e^{-A(x)}$. Et alors, on aura $z(x) = F(x) + k$, où k est une constante réelle.
- $\diamond$ Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle (E) est
$$y = \big(F(x) + k\big)\, e^{A(x)}\ .$$

En pratique, on n'introduit pas la lettre z, mais on conserve la lettre c, et on la considère comme une fonction $c(x)$, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple. Résoudre l'équation
$$y'(x) = \frac{2}{x} y(x) + x^3\ ,$$
sur un intervalle qui ne contient pas 0 . Cette équation est de la forme
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
avec $a(x) = \dfrac{2}{x}$ et $b(x) = x^3$.
L'équation homogène associée est de la forme
$$y' = a(x)y, \quad \text{avec} \quad a(x) = \frac{2}{x}\ .$$

- $\diamond$ La fonction $A(x) = 2\ln|x| = \ln x^2$ étant une primitive de la fonction $a(x)$, l'équation homogène associée a pour solution générale $y = c\, e^{\ln x^2} = c\, x^2$.
- $\diamond$ On utilise la méthode de variation de la constante : on pose $y(x) = c(x)\, x^2$. Ceci donne
$$y'(x) = c'(x)\ x^2 + c(x)2x\ .$$
En remplaçant y et y' par ces valeurs dans l'équation (E), on obtient :
$$c'(x)\, x^2 + c(x)\, 2x = \frac{2}{x} c(x)\, x^2 + x^3$$
d'où
$$c'(x)\, x^2 = x^3 \quad \text{et} \quad c'(x) = x\ .$$
On en conclut que
$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k\ .$$
- $\diamond$ Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est :
$$y(x) = \frac{x^4}{2} + k\, x^2\ .$$

5.7 Exercices sur l'intégration

Exercice 77. On considère la la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := a\sin(wx + \varphi)\ ,$$

où a et w sont deux réels strictement positifs et φ un réel quelconque.
Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{w}\right]$.

Exercice 78. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x|\, dx$.

Exercice 79. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + 1)\, dt$ 2) $\displaystyle\int_1^8 t^{\frac{1}{3}}\, dt$ 3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+s)^3}\, ds$

4) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ 5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du$ 6) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\, ds$.

Exercice 80. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles où elles sont définies :

1) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 2) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ 3) $x \longmapsto 3x\, e^{x^2}$ 4) $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Indication : on essaiera de reconnaître des dérivées de fonctions composées.

Exercice 81. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 te^{2t}\, dt$ 2) $\displaystyle\int_0^\pi t\sin t\, dt$ 3) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi t\cos t\, dt$

4) $\displaystyle\int_1^e t\ln t\, dt$ 5) $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{-t}\, dt$ 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\cos t\, dt$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3}\, dx$ 8) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt{5+x}}\, dx$ 9) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\, dx$.

Exercice 82. Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant les intervalles où elles sont définies :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ 2) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\, x$ 3) $x \longmapsto x\,\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ 4) $x \longmapsto x\cos x$.

Exercice 83. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose l'intégrale

$$I_n := \int_0^1 x^n e^x\, dx\ .$$

1. Montrer, sans calculer I_n, que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Converge-t-elle ?
2. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$0 \le I_n \le \frac{e}{n+1}\ ,$$

   et en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $I_n = e - nI_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire le calcul de I_3.

Exercice 84. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n := \int_0^1 (x^2-1)^n \, dx \ .$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \ .$$

2. En déduire la valeur de I_n .

Exercice 85. Soit $x > 0$. On définit les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ par :

$$F(x) := \int_1^x \cos(\ln t) \, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_1^x \sin(\ln t) \, dt \ .$$

1. Montrer que $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$ et $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.
2. En déduire les expressions de $F(x)$ et $G(x)$.

Exercice 86.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) := \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}$.
   On considère les deux intégrales

$$J := \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} \, dt \quad \text{et} \quad K := \int_0^1 \sqrt{t^2+2} \, dt \ .$$

3. Montrer que $J + 2I = K$.
4. Montrer, en intégrant K par parties, que $K = \sqrt{3} - J$.
5. Retrouver ce résultat en intégrant J par parties.
6. Calculer J et K.

Exercice 87. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2+2} \, dt \, dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dt$ 3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^6+1} \, dt$

4) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}} \, dt$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) \, dx$ 6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{(t^4+1)^2} \, dt$.

Exercice 88. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$.

Exercice 89.

1. Déterminer deux réels a, b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \ .$$

2. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x(x+1)}$.

Exercice 90. Calculer l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$.
INDICATION : on pourra mettre le polynôme x^2+x+1 sous la forme $(x+a)^2+b^2$, puis on effectuera le changement de variable $x+a=bt$.

Exercice 91. On veut calculer l'intégrale $J := \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3+1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} .$$
2. Calculer J à l'aide d'un changement de variable comme dans l'exercice précédent.

Exercice 92. Calculer les primitives des fonctions associées aux expressions suivantes :

1)	$x^3e^{-x^2}$	2)	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	3)	$\dfrac{(\operatorname{Arctan} x)^2}{1+x^2}$	4)	$\operatorname{Arcsin} x$
5)	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	6)	$(e^x+1)^2e^x$	7)	$x^2(1-x^3)^{\frac{1}{3}}$	8)	x^2e^{-x} .

Exercice 93. Calculer l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x-x^2}\, dx$.
INDICATION : on pourra mettre le polynôme du second degré sous la forme $b^2-(x+a)^2$ et on effectuera le changement de variable $x+a = b\sin\theta$.

Exercice 94 (Intégration numérique par la méthode des rectangles)**.**

1. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$, à l'aide de la méthode des rectangles.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(0) := 1 \quad \text{et} \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^* .$$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $[0,\pi]$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\, dx$.

Exercice 95. Pour tout $x > 0$, on pose
$$G(x) := \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{et} \quad F(x) := \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt .$$

1. Exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
2. En déduire le calcul de la dérivée $G'(x)$.
3. Donner le sens de variation de G sur $]0,\pi]$.

Exercice 96.

1. Soit $a > 0$. Montrer que si une fonction continue f est paire sur l'intervalle $[-a,a]$, alors la fonction définie par $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est impaire.

2. Démontrer un résultat analogue lorsque la fonction f est impaire.

   Soit $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique de période $T > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) := \displaystyle\int_x^{x+T} g(t)\, dt$.

3. Montrer que G est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer sa dérivée.
5. En déduire que G est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
6. Sous quelle condition la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ est-elle périodique, de période T ?

Exercice 97 (Développement du logarithme)**.**
Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et un réel $x \in]-1, +\infty[$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} .$$
2. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt .$$
3. Montrer que
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \leq \frac{1}{n+2} .$$
4. Conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 .$$
5. Plus généralement, montrer que si $0 \leq x \leq 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) .$$

Exercice 98.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'(x) = -y(x) + \cos x .$$
2. Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution périodique.

Exercice 99. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes sur les intervalles considérés :

1) $(1 - x^2)\, y'(x) - x\, y(x) = 1$, sur $]-1, 1[$.

2) $x\, y'(x) - \dfrac{y(x)}{2} = x \ln x$, sur $]0, +\infty[$.

Exercice 100. Déterminer la solution sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - (\tan x)y(x) = x \ ,$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 101. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad xy'(x) + 2y(x) = x^2 \ .$$

1. Chercher une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, polynomiale de degré inférieur ou égal à deux.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Combien y a t-il de solution(s) de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 102. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad y'(x) = y(x) + f(x) \ ,$$

où f est une fonction de période $T > 0$ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer la solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la fonction
$$F(x) := \int_0^x e^{-t} f(t) dt \ .$$
2. Montrer que $F(x+T) = e^{-T}F(x) + F(T)$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution de période T, que l'on déterminera.