CONTRÔLE CONTINU 1 (OCTOBRE 2011)

Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.
On considère une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$ d'un espace vectoriel V.

(1) Donner la définition de $Vect(\mathcal{A})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$.

(2) Donner sa principale propriété.

Exercice 1 (Nombre complexe)**.**
On considère le nombre complexe
$$\omega := \frac{\sqrt{3} + 3i}{1 - i} \ .$$

(1) Calculer ω sous forme algébrique $\omega = x + iy$, c'est-à-dire déterminer la partie réele x et la partie imaginaire y.

(2) Mettre ω sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, c'est-à-dire déterminer le module ρ et l'argument θ.

(3) Combien de solutions complexes $z \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = \omega$ admet-elle ? Énoncer le théorème que vous utilisez.

(4) Déterminer toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$, sous la forme de votre choix, de l'équation $z^2 = \omega$.

Exercice 2 (Espace vectoriel)**.**
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:
$$v_1 := (1, -3, -5), \quad v_2 := (3, 4, -2) \quad \text{et} \quad v_3 := (1, 10, 8) \ .$$

(1) Ces vecteurs sont-ils libres ?

(2) Quelle est la dimension de $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 ?

(3) Montrer que
$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \ .$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(4) Montrer que $W = Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(5) Donner deux bases différentes de W.

(6) Donner un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.