Contrôle Continu 1 (octobre 2012)

Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront pris en compte.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est, bien sur, interdit.

Questions de cours.
On considère une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ d'un espace vectoriel V.

(1) Donner la définition de "la famille $\mathcal{A}$ est libre".

(2) Énoncer le théorème de la base incomplète.

— ✍ —

Exercice 1 (Nombre complexe)**.**
On considère le nombre complexe

$$\omega := \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} .$$

(1) Écrire ω sous forme algébrique $\omega = x + iy$, c'est-à-dire déterminer la partie réele x et la partie imaginaire y.

(2) Mettre ω sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, c'est-à-dire déterminer le module ρ et l'argument θ.

(3) En conclure les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

(4) Calculer ω^{12}.

(5) Combien l'équation $z^2 = \omega$ admet-elle de solutions complexes ? Quel théorème du cours vous permet de répondre à cette question ?

(6) Donner les solutions complexes de l'équation $z^2 = \omega$.

— ✍ —

Exercice 2 (Espace vectoriel)**.**
On considère le sous-ensemble

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une base de V.

(3) Quelle est la dimension de V ?

On considère les vecteurs suivants de V :

$$\vec{v}_1 := (1, 0, 2), \quad \vec{v}_2 := (3, -3, -3) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 := (0, -2, -6) .$$

(4) Sans faire aucun calcul, dites si ces vecteurs sont libres ? Justifier bien votre réponse.

(5) Est-ce que la famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice de V ? Justifier bien votre réponse.

(6) Extraire de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ une base de V.