Correction du Contrôle Continu 1 (oct. 2011)

Questions de cours.
On considère une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ d'un espace vectoriel V.

(1) Donner la définition de $Vect(\mathcal{A})$, le sous-espace vectoriel de V engendré par $\mathcal{A}$.

Le sous-espace vectoriel $Vect(\mathcal{A})$ de V engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{A}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{Vect(\mathcal{A}) := \{\lambda_1\vec{a_1} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n} \in V \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}}\ .$$

(2) Donner sa principale propriété.

C'est un sous-espace vectoriel de V, qui est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille de vecteurs $\mathcal{A}$: pour tout sous-espace vectoriel Z de V, si Z contient $\mathcal{A}$, alors Z contient $Vect(\mathcal{A})$

$$\boxed{\mathcal{A} \subset Z \Longrightarrow Vect(\mathcal{A}) \subset Z}\ .$$

Exercice 1 (Nombre complexe)**.**
On considère le nombre complexe

$$\omega := \frac{\sqrt{3} + 3i}{1 - i}\ .$$

(1) Calculer ω sous forme algébrique $\omega = x + iy$, c'est-à-dire déterminer la partie réele x et la partie imaginaire y.

En multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient

$$\frac{\sqrt{3} + 3i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} + 3i)(1 + i)}{2} = \boxed{\frac{(\sqrt{3} - 3) + i(\sqrt{3} + 3)}{2}}\ .$$

(2) Mettre ω sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, c'est-à-dire déterminer le module ρ et l'argument θ.

On commence par mettre le numérateur $\sqrt{3} + 3i$ sous forme polaire :

$$\underline{\sqrt{3} + 3i} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \underline{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}\ .$$

Puis, on met le dénominateur sous forme polaire :

$$\underline{1 - i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \underline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\ .$$

On peut ensuite diviser les deux :

$$\omega = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \boxed{\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

(3) Combien de solutions complexes $z \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = \omega$ admet-elle ? Énoncer le théorème que vous utilisez.

Par le théorème fondamental de l'algèbre, on sait que cette équation polynômiale de degré 2 admet deux solutions complexes, comptées avec multiplicité.

(4) Déterminer toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$, sous la forme de votre choix, de l'équation $z^2 = \omega$.

On cherche les solutions sous la forme polaire $z = re^{it}$:

$$z^2 = r^2 e^{2it} = \sqrt{6} e^{i\frac{7\pi}{12}} ,$$

Ce qui donne

$$r = 6^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad 2t = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \ \text{avec } k \in \mathbb{Z} .$$

Cette dernière condition équivaut à

$$t = \frac{7\pi}{24} + k\pi, \ \text{avec } k \in \mathbb{Z} .$$

Il suffit alors de considérer les valeurs $k = 0$ et $k = 1$ pour trouver les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation :

$$\boxed{z_1 = 6^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{7\pi}{24}} \quad \text{et} \quad z_2 = 6^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{31\pi}{24}}} .$$

Exercice 2 (Espace vectoriel)**.**
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := (1, -3, -5), \quad v_2 := (3, 4, -2) \quad \text{et} \quad v_3 := (1, 10, 8) .$$

(1) Ces vecteurs sont-ils libres ?

On voit que ces vecteurs vérifient l'égalité $v_3 = v_2 - 2v_1$, ce qui équivaut à la combinaison linéaire non-triviale suivante

$$\boxed{2v_1 - v_2 + v_3 = 0} .$$

Ces vecteurs ne sont donc pas libres ; ils sont liés.

(2) Quelle est la dimension de $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 ?

On considère la matrice composée des vecteurs lignes v_1, v_2 et v_3 et on cherche une matrice échelonnée équivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{array}{cc} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{13} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Comme la matrice échelonnée a deux lignes non-nulles, le sous-espace vectoriel $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2 et v_3 est de dimension 2.

$$\boxed{\dim Vect(\{v_1, v_2, v_3\}) = 2}$$

(3) Montrer que

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\} \ .$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On applique la proposition du cours de la manière suivante.

• L'ensemble W n'est pas vide : par exemple, le vecteur nul $(0, 0, 0)$, appartient à W.

• L'ensemble W est stable par combinaison linéaire : soient $(x, y, z), (x', y', z') \in W$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \in W$. Comme $(x, y, z), (x', y', z') \in W$, on a

$$2x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x' - y' + z' = 0 \ .$$

D'où

$$2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') =$$
$$\lambda(2x - y + z) + \mu(2x' - y' + z') = 0 \ .$$

L'ensemble W est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(4) Montrer que $W = Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$.

On voit que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont dans W. Donc le sous-espace vectoriel $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$, engendré par ces vecteurs, est inclus dans W. Or, ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension. Ils sont donc égaux.

$$\boxed{W = Vect(\{v_1, v_2, v_3\})}$$

(5) Donner deux bases différentes de W.

La méthode utilisée à la question (2) montre que les deux vecteurs

$$\boxed{\{(1, -3, -5), (0, 1, 1)\}} \ ,$$

composant la matrice échelonnée, forment une base de W.

Les deux vecteurs

$$\boxed{\{v_1, v_2\}}$$

ne sont pas colinéaires. Ils sont donc libres. Comme le sous-espace vectoriel W est de dimension 2, ils forment donc une base de ce dernier.

(6) Donner un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.

On considère le sous-espace vectoriel $S := Vect(\{e_1\})$ engendré par le vecteur $e_1 := (1, 0, 0)$. Les éléments de S sont les vecteurs de la forme $(x, 0, 0)$, avec $x \in \mathbb{R}$. L'intersection de S et de W est donc composée des vecteurs de la forme $(x, 0, 0)$ qui satisfont $2x - 0 + 0 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. On a ainsi $S \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. Ce qui montre que la somme de S avec W est directe : $S \oplus W$. Ce sous-espace vectoriel est de dimension

$$\dim S \oplus W = \dim S + \dim W = 1 + 2 = 3 \ .$$

On en conclut que $S \oplus W = \mathbb{R}^3$ et que S est un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.