# CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU 1 (OCT. 2012)

**Questions de cours.**
On considère une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ d'un espace vectoriel $V$.

(1) Donner la définition de "la famille $\mathcal{A}$ est libre".

La famille de vecteurs $\mathcal{A}$ est libre si toute combinaison linéaire du vecteur nul $\vec{0}$ à l'aide des vecteurs de $\mathcal{A}$ est triviale, c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0} .$$

(2) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Le théorème de la base incomplète affirme que :

$\boxed{\text{toute famille libre } \mathcal{A} \text{ d'un espace vectoriel peut s'étendre en une base } \mathcal{B},\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$.

— ✍ —

**Exercice 1** (Nombre complexe)**.**
On considère le nombre complexe

$$\omega := \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} .$$

(1) Calculer $\omega$ sous forme algébrique $\omega = x + iy$, c'est-à-dire déterminer la partie réele $x$ et la partie imaginaire $y$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, on obtient

$$\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}} .$$

(2) Mettre $\omega$ sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, c'est-à-dire déterminer le module $\rho$ et l'argument $\theta$.

On commence par mettre le numérateur $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ sous forme polaire :

$$\boxed{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} .$$

Puis, on met le dénominateur sous forme polaire :

$$\boxed{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} .$$

On peut ensuite diviser les deux :

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}} .$$

(3) En conclure les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On sait que la forme polaire correspond à la forme trigonométrique suivante

$$\omega = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \ .$$

En identifiant avec la forme algébrique du nombre $\omega$ calculée à la question 1, on trouve

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} \ .$$

(4) Calculer $\omega^{12}$.

Ce calcul se fait facilement avec la forme polaire de $\omega$ :

$$\boxed{\omega^{12}} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{i\frac{\pi\times 12}{12}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{12} e^{i\pi} = 2^{\frac{1}{2}\times 12} \times (-1) = -2^6 = \boxed{-64} \ .$$

(5) Combien l'équation $z^2 = \omega$ admet-elle de solutions complexes ? Quel théorème du cours vous permet de répondre à cette question ?

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que le polynôme complexe $X^2 - \omega$ admet deux racines complexes comptées avec multiplicité. Il y a ici deux racines distinctes car le discriminant $\Delta = 4\omega$ n'est pas nul.

(6) Donner les solutions complexes de l'équation $z^2 = \omega$.

On cherche les solutions sous la forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$. Dans ce cas, l'équation $z^2 = \omega$ s'écrit $\rho^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. En identifiant les modules et les arguments, on trouve

$$\rho^2 = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad 2\theta = \frac{\pi}{12} + k \times 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Les solutions sont donc

$$\boxed{\rho = 2^{\frac{1}{4}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{24}, \ \theta = \frac{\pi}{24} + \pi = \frac{25\pi}{24}} \text{, i.e.}$$

$$\boxed{z = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{24}}} \quad \text{et} \quad \boxed{z = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{25\pi}{24}}} \ .$$

— ✍ —

**Exercice 2** (Espace vectoriel).
On considère le sous-ensemble

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que $V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On applique le théorème du cours qui dit qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel s'il contient le vecteur nul et s'il est stable pour la somme et pour la multiplication par les scalaires.

- ◇ Les coordonnées du vecteur nul $(0,0,0)$ vérifient bien l'équation $2x + 3y - z = 0$, il appartient donc à $V$.

- $\diamond$ Soient $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ deux éléments de $V$, c'est-à-dire
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x' + 3y' - z' = 0 \ . \end{cases}$$
En sommant ces deux égalités, on trouve $2(x + x') + 3(y + y') - (z + z') = 0$, ce qui signifie que
$$\boxed{(x + x', y + y', z + z') = (x, y, z) + (x', y', z') \in V} \ .$$
- $\diamond$ De la même manière, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y, z) \in V$, en multipliant l'équation $2x + 3y - z = 0$ par $\lambda$, on trouve $2(\lambda x) + 3(\lambda y) - (\lambda z) = 0$, ce qui signifie que
$$\boxed{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda.(x, y, z) \in V} \ .$$

On en conclut que $\underline{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

(2) Donner une base de $V$.

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un vecteur de $V$. En réécrivant l'équation $2x + 3y - z = 0$ sous la forme $z = 2x + 3y$, on voit que $\vec{u}$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$\vec{u} = (x, y, 2x + 3z) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3) \ .$$
On en déduit donc que
$$\boxed{\{(1, 0, 2), (0, 1, 3)\}}$$
forme une base de $V$.

(3) Quelle est la dimension de $V$ ?

Comme la base trouvée à la question précédente possède $2$ éléments, la dimension du sous-espace vectoriel $V$ est
$$\boxed{\dim V = 2} \ .$$

On considère les vecteurs suivants de $V$ :
$$\vec{v}_1 := (1, 0, 2), \quad \vec{v}_2 := (3, -3, -3) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 := (0, -2, -6) \ .$$

(4) Sans faire aucun calcul, dites si ces vecteurs sont libres ? Justifier bien votre réponse.

Nous avons vu dans le cours qu'une famille libre de vecteurs possède toujours moins d'éléments que la dimension du sous-espace dans le lequel les vecteurs vivent. Comme la dimension de $V$ est $2$ et que l'on a là $3$ vecteurs, <u>ils ne peuvent donc pas être libres</u>.

(5) Est-ce que la famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice de $V$ ? Justifier bien votre réponse.

Les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils engendrent donc un sous-espace vectoriel de dimension $2$. Et comme le sous-espace vectoriel $V$ est de dimension $2$, <u>la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ engendre tout $V$</u>.

(6) Extraire de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ une base de $V$.

Les deux premiers vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre. Et comme le sous-espace vectoriel $V$ est de dimension $2$, <u>ils en forment une base</u>.