Contrôle Continu 2 (novembre 2011)

Questions de cours.
Soit $f : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V.

(1) Donner la définition de vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Un vecteur propre de valeur propre λ est un vecteur $\vec{x}$ non nul vérifiant l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.

Soit $g : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie.

(2) Énoncer le théorème du rang appliqué à l'application linéaire g.

Le théorème du rang réside dans l'égalité suivante

$$\boxed{\dim \ker(g) + \operatorname{rang}(g) = \dim E} .$$

Exercice 1 (Application linéaire)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'application suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X-1)P' + 2P \ . \end{array} \right.$$

(1) Montrer que l'application f est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ and soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P + \mu Q) & = & (X-1)(\lambda P + \mu Q)' + 2(\lambda P + \mu Q) \\ & = & (X-1)(\lambda P' + \mu Q') + \lambda.2P + \mu.2Q \\ & = & \underbrace{\lambda(X-1)P' + \lambda.2P}_{=\lambda f(P)} + \underbrace{\mu(X-1)Q' + \mu.2Q}_{=\mu f(Q)} \\ & = & \lambda f(P) + \mu f(Q) \ , \end{array}$$

ce qui montre que l'application f est linéaire.

(2) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$.

L'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'endomorphisme f est

$$f(1) = 2, \quad f(X) = -1 + 3X, \quad f(X^2) = -2X + 4X^2 \ .$$

La matrice $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est formée des coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}\ .$$

(3) Calculer la trace $\operatorname{tr} f$ et le déterminant $\det f$ de l'endomorphisme f.

Comme la trace et déterminant sont indépendants de la base choisie, on peut les calculer sur la matrice M. La trace est la somme des éléments sur la diagonale :

$$\boxed{\operatorname{tr} f = 9}\ .$$

Comme la matrice M est triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit des éléments sur la diagonale :

$$\boxed{\det f = 24}\ .$$

(4) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ de la famille de vecteurs

$$\mathcal{B}' := \{1, (X-1), (X-1)^2\}$$

dans la base $\mathcal{B}$.

La matrice de passage $P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ est formée des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, soit

$$1 = 1, \quad (X-1) = -1 + X, \quad (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2\ ;$$

d'où

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\ .$$

(5) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

On effectue le calcul de l'inverse de la matrice P de la manière suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{\substack{L_2 \to L_2 + 2L_3 \\ L_1 \to L_1 - L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ce qui donne au final

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\ .$$

(6) En déduire les coordonnées du polynôme $Q := 3 - 2X + 7X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Les coordonnées du polynôme $Q = 3 - 2X + 7X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $[Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Les coordonnées du polynôme Q dans la base $\mathcal{B}'$ sont obtenues en effectuant le produit suivant

$$[Q]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[Q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$\boxed{Q = 3 - 2X + 7X^2 = 8 + 12(X-1) + 7(X-1)^2} .$$

(7) Que représente la matrice $P^{-1}MP$?

La matrice obtenue en effectuant le produit

$$\underline{P^{-1}MP = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)}$$

<u>représente l'endormorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$</u>.

(8) Déterminer la matrice $P^{-1}MP$ de deux manières différentes.

◇ L'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ par l'endomorphisme f est

$$f(1) = 2, \quad f(X-1) = 3(X-1), \quad f((X-1)^2) = 4(X-1)^2 .$$

La matrice $P^{-1}MP = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ est formée des coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}'$, soit

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} .$$

◇ On retrouve ce résultat en faisant directement le calcul :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} .$$

Exercice 2 (Diagonalisabilité)**.**

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

Le polynôme caractéristique de la matrice M est égal à :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ 2 & -X & -2 \\ 0 & 0 & -2-X \end{vmatrix} .$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= -(X+2)\begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 2 & -X \end{vmatrix} = -(X+2)(X(X+1)-2) \\ &= -(X+2)(X^2+X-2) = \boxed{-(X+2)^2(X-1)} . \end{aligned}$$

(2) Déterminer le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de M.

Le spectre de M est égal à l'ensemble des racines du polynôme caractéristique :

$$\boxed{\operatorname{Spec} M = \{1, -2\}} .$$

(3) Est-ce que la matrice M est trigonalisable ? (Énoncer précisement le théorème que vous utilisez.)

Comme le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est scindé, la matrice M est trigonalisable.

(4) Déterminer le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2.

Le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est défini par

$$E_{-2} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid MX = -2X\} .$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'équation $MX = -2X$ devient

$$\begin{cases} -x+y &= -2x \\ 2x-2z &= -2y \\ -2z &= -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= 0 . \end{cases}$$

Donc, le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 est égal à

$$\boxed{E_{-2} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} .$$

(5) La matrice M est-elle diagonalisable ? (Énoncer précisement le théorème que vous utilisez.)

Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si les dimensions des sous-espaces propres (non réduits au vecteur nul) sont égales à la multiplicité algébrique des valeurs propres dans le polynômes caractéristique. Ici la dimension de E_{-2} est $1 < 2$; donc la matrice M n'est pas diagonalisable.