CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU 2 (NOVEMBRE 2012)

Questions de cours.
Soit $f : U \to V$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels U et V de dimension finie.

(1) Donner la définition du noyau de f.

Le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des antécédents du vecteur nul de l'espace but :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \left\{\vec{u} \in U \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\right\}} .$$

(2) Énoncer le théorème du rang appliqué à l'application linéaire f.

Le théorème du rang, appliqué à l'application linéaire f, affirme que la dimension de l'espace source est égale à la somme du rang de f et de la dimension de son noyau :

$$\boxed{\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f} .$$

Exercice 1 (Application linéaire)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-17x + 3y + 9z, -54x + 7y + 27z, -12x + 3y + 7z) .$$

(1) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base canonique

$$\mathcal{E} := \{\vec{e_1} := (1, 0, 0),\ \vec{e_2} := (0, 1, 0),\ \vec{e_3} := (0, 0, 1)\} .$$

Par définition, la matrice M est formée en colonne des images des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ par l'application f. Comme

$$f(1, 0, 0) = (-17, -54, -12),\ f(0, 1, 0) = (3, 7, 3),\ \text{et } f(0, 0, 1) = (9, 27, 7) ,$$

alors la matrice M est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 9 \\ -54 & 7 & 27 \\ -12 & 3 & 7 \end{pmatrix}} .$$

(2) Calculer la trace $\operatorname{tr} f$ et le déterminant $\det f$ de l'endomorphisme f.

Comme la trace et le déterminant sont indépendants de la base choisie, on peut les calculer sur la matrice M. La trace est la somme des éléments sur la diagonale :

$$\boxed{\operatorname{tr} f = -3} .$$

On calcule le déterminant en faisant les opérations sur les colonnnes suivantes.

$$\begin{vmatrix} -17 & 3 & 9 \\ -54 & 7 & 27 \\ -12 & 3 & 7 \end{vmatrix} \underset{C_1 \mapsto C_1 + 4C_2}{=} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 9 \\ -26 & 7 & 27 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \underset{C_3 \mapsto C_3 - 3C_2}{=} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -26 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -26 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \mapsto C_2 + 3C_3}{=} 2 \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -26 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -26 & 16 \end{vmatrix} = (-2)(-80+78) = 4 \ .$$

Le déterminant de l'application f est donc égal à

$$\boxed{\det f = 4} \ .$$

(3) L'application f est-elle injective (oui ou non) ? surjective (oui ou non) ? bijective (oui ou non) ? Justifiez bien votre réponse.

L'application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Un théorème du cours affirme qu'il n'y a alors que deux possibilités : injectif-surjectif-bijectif ou non injectif-non surjectif-non bijectif. Or, ici le déterminant de f n'est pas nul, c'est donc la première possibilité qui est vérifiée.

En conclusion, l'application linéaire f est injective, surjective et bijective.

On considère la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b_1} := (1,0,2), \ \vec{b_2} := (0,-3,1), \ \vec{b_3} := (1,2,1) \right\} \ .$$

(4) Calculer les images des vecteurs $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$ par l'application f et en déduire la matrice $N := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.

Par un calcul direct, on trouve

$$\boxed{f(1,0,2) = (1,0,2), \ f(0,-3,1) = (0,6,-2) = (-2).(0,-3,1), \ f(1,2,1) = (-2,-13,1)} \ .$$

De ce calcul, on tire donc $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$ et $f(\vec{b}_2) = (-2)\vec{b}_2$. Écrivons le vecteur $(-2,-13,1)$ sur la base $\mathcal{B}$; pour cela, on résout le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + z & = & -2 \\ -3y + 2z & = & -13 \\ 2x + y + z & = & 1 \ , \end{array} \right.$$

qui donne les coordonnées $(x,y,z) = (0,3,-2)$. On a donc $f(\vec{b}_3) = 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$.

Au final, la matrice $N = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est formée des coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}} \ .$$

(5) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{E}$.

La matrice de passage $P = Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ est formée des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{E}$, soit

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\ .$$

(6) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

On calcule l'inverse de la matrice P par les opérations par ligne suivantes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \to L_3 + 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \to -L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_1 \to L_1 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Ce qui donne au final

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}}\ .$$

(7) Que représente la matrice $P^{-1}MP$?

Ce produit de matrices correspond au produit

$$\boxed{P^{-1}MP = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id})Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)}$$

qui <u>représente l'endormorphisme f dans la base $\mathcal{B}$</u>.

(8) Vérifier votre réponse de la question précédente par un calcul.

On effectue le calcul de la question précédente, ce qui donne

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 3 & 9 \\ -54 & 7 & 27 \\ -12 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}\ .$$

On a bien retrouvé la matrice $N = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de la question (4).

Exercice 2 (Diagonalisabilité)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, on considère l'application linéaire suivante

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ & & P = aX + b & \mapsto & (5a+b)X + b - 4a\ . \end{array} \right.$$

(1) Quelle propriété le polynôme $P := -X + 2$ vérifie-t-il par rapport à l'application f ? (Calculer son image par f.)

On a $f(-X+2) = -3X + 6 = 3(-X+2)$, c'est-à-dire

$$\boxed{f(P) = 3P} .$$

Comme $P \neq 0$, le polynôme P est donc un vecteur propre de f de valeur propre 3.

(2) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} := \{X, 1\}$.

Comme $f(X) = 5X - 4$ et $f(1) = X + 1$, alors la matrice M, formée en colonne des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans elle-même, est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}} .$$

(3) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f.

Le polynôme caractéristique est indépendant de la base dans laquelle on le calcule. Ici, on utilise la matrice M :

$$\boxed{\chi_f(X)} = \begin{vmatrix} 5-X & 1 \\ -4 & 1-X \end{vmatrix} = (5-X)(1-X) + 4 = X^2 - 6X + 9 \boxed{= (X-3)^2} .$$

(4) Déterminer le spectre de f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de f.

Par théorème du cours, on sait que le spectre est l'ensemble des racines du polynôme. caractéristique. Ici, le spectre est donc

$$\boxed{\operatorname{Spec} f = \{3\}} .$$

(5) Quelle est la dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3.

On sait que le sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est le noyau de l'application linéaire $f - 3\mathrm{id}$:

$$E_3 = \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{id}) .$$

On peut donc calculer sa dimension en utilisant le théorème du rang :

$$\dim \mathbb{R}_1[X] = \dim \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{id}) + \operatorname{rg}(f - 3\mathrm{id}) .$$

Le rang de $f - 3\mathrm{id}$ est égal au rang de la matrice

$$M - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est 1 (la première colonne est le double de la seconde). On conclut que

$$\boxed{\dim E_3 = 2 - 1 = 1} .$$

(6) Conclure de la question précédente que l'endomorphisme f est diagonalisable ou pas.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si les dimensions des sous-espaces propres (non réduits au vecteur nul) sont égales à la multiplicité algébrique des valeurs propres dans le polynômes caractéristique. Ici la dimension de E_3 est $1 < 2$; donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.