EXAMEN FINAL (DÉCEMBRE 2011)

Questions de cours.

(1) Donner la définition de forme quadratique.

Une forme quadratique est une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) .$$

(2) Donner un exemple de forme quadratique.

L'application $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x,y) := x^2 + y^2$ est une forme quadratique. (Elle provient, par exemple de la forme bilinéaire $\Phi((x,y)(x',y')) := xx' + yy'$).

Exercice 1 (*Espace euclidien*).
On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 3. On considère l'application

$$\begin{cases} \langle -,- \rangle & : & \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q \rangle := \int_0^1 xP(x)Q(x)dx \ . \end{cases}$$

(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$? (Justifier votre réponse.)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est de <u>dimension 4</u>. En effet, la dimension d'un espace vectoriel est définie par le nombre (constant) des éléments formant une base. Or, par exemple, la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$, à 4 éléments, en forme une base.

(2) Montrer qu'un polynôme P vérifie $\langle P,P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2dx = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul $P = 0$.

Si $P = 0$ est le polynôme nul, alors $\langle P,P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2dx = 0$. Dans l'autre sens, soit P un polynôme qui vérifie $\int_0^1 xP(x)^2dx = 0$. Comme la fonction $xP(x)^2 \geq 0$ est positive ou nulle entre 0 et 1, on a que $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Ceci implique que le polynôme P a une infinité de racines, cas possible uniquement si <u>P est le polynôme nul</u>.

(3) Montrer que l'application $\langle -,- \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Il nous faut vérifier les quatres points suivants.

◇ <u>Symétrique.</u> On voit immédiatement que

$$\langle P,Q \rangle = \int_0^1 xP(x)Q(x)dx = \int_0^1 xQ(x)P(x)dx = \langle Q,P \rangle \ .$$

◇ <u>Bilinéaire.</u> Montrons la linéarité à gauche :

$$\begin{aligned} \boxed{\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle} &= \int_0^1 x(\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))Q(x)dx = \int_0^1 (\lambda x P_1(x)Q(x) + \mu x P_2(x)Q(x))dx \\ &= \lambda \int_0^1 xP_1(x)Q(x)dx + \mu \int_0^1 xP_2(x)Q(x)dx \boxed{= \lambda\langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle} \ . \end{aligned}$$

La linéarité à droite est une conséquence directe de la linéarité à gauche et de la symétrie.

◇ <u>Définie.</u> Il s'agit de montrer qu'un polynôme P vérifie $\langle P,P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2dx = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul $P = 0$. Ceci a été montré à la question précédente.

$\diamond$ Positive. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 \underbrace{xP(x)^2}_{\geq 0} \, dx \geq 0 \ .$$

(4) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B}}(\langle -, - \rangle)$ de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ dans la base canonique

$$\mathcal{B} := \{1,\, X,\, X^2,\, X^3\}$$

de $\mathbb{R}_3[X]$.

Le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice $M := Mat_{\mathcal{B}}(\langle -, - \rangle)$ est égal à

$$\langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \int_0^1 x^{i+j-1} dx = \frac{1}{i+j}.$$

Au final, on trouve la matrice suivante

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \ .$$

(5) La base canonique $\mathcal{B} := \{1,\, X,\, X^2,\, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle orthonormée pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$?

La base $\mathcal{B}$ n'est ni orthogonale, par exemple $\langle 1, X \rangle = \frac{1}{3} \neq 0$, ni normée, par exemple $\langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{2} \neq 1$.

On considère le sous-espace vectoriel F engendré par les polynômes suivants

$$F := Vect(\{1,\, X\}) \ .$$

(6) Donner une base orthonormée de F pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Posons

$$P_1 := 1 \quad \text{et} \quad P_2 := X \ .$$

Comme la norme de P_1 est égale à

$$||P_1||^2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \ ,$$

on considère le polynôme de norme 1 :

$$\boxed{Q_1 := \sqrt{2}} \ .$$

Soit $F_1 := Vect(\{P_1\}) = Vect(\{Q_1\})$. On calcule

$$\mathrm{proj}^{\perp}_{F_1}(P_2) = \frac{1}{||P_1||^2} \langle P_2, P_1 \rangle P_1 = 2 \times \frac{1}{3}$$

On a donc que $P_2 - \mathrm{proj}^{\perp}_{F_1}(P_2) = X - \frac{2}{3}$ est orthogonal à F_1. Sa norme vaut

$$||X - \frac{2}{3}||^2 = \int_0^1 x \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x \right) dx = \frac{1}{6^2} \ .$$

Le second polynôme de cette base orthonormée est donc

$$\boxed{Q_2 := 6X - 4} \ .$$

(7) Calculer la projection orthogonale $\mathrm{proj}_F^{\perp}(X^2)$ de X^2 sur F.

Avec la base orthonormée $\{Q_1, Q_2\}$ trouvée à la question précédente, le calcul de la projection orthogonale de X^2 sur F s'effectue de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathrm{proj}_F^{\perp}(X^2)} &= \langle X^2, Q_1\rangle Q_1 + \langle X^2, Q_2\rangle Q_2 \\
&= 2\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^3(6x-4)dx \times (6X-4) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{5}(6X-4) = \boxed{\frac{6}{5}X - \frac{3}{10}}\ .
\end{aligned}$$

(8) Donner une base orthogonale du sous-espace vectoriel $Vect(\{1,\ X, X^2\})$ engendré par les polynômes 1, X et X^2.

D'après la question précédente, le polynôme

$$X^2 - \mathrm{proj}_F^{\perp}(X^2) = X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}$$

est orthogonal à F. Donc la famille

$$\boxed{\left\{\sqrt{2}, 6X-4, X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}\right\}}$$

est une base orthogonale de $Vect(\{1,\ X, X^2\})$.

Exercice 2 (*Diagonalisation des matrices*)**.**
On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

Le polynôme caractéristique de la matrice M est égal à : $\boxed{\chi_M(X) = -(X-1)(X-3)^2}$.

(2) Déterminer le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres.

L'ensemble des racines du polynôme caractéristique correspond à l'ensemble des valeurs propres. Le spectre de M est donc $\boxed{\mathrm{Spec}(M) = \{1, 3\}}$.

(3) Est-ce que la matrice M est trigonalisable ? Énoncer précisement le théorème que vous utilisez.

Comme le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est scindé, alors la matrice M est trigonalisable.

(4) Déterminer le rang de la matrice $M - 3I$.

Le rang de la matrice

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

est $\boxed{\mathrm{rg}(M-3I) = 1}$.

(5) En conclure le dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3. Préciser le théorème que vous appliquez.

Le sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est égal au noyau de $M - 3I$: $\boxed{E_3 = \ker(M-3I)}$. Par le théorème du rang, on sait que la dimension du noyau de $M - 3I$ vaut

$$\boxed{\dim\ker(M-3I) = 3 - \mathrm{rg}(M-3I) = 3 - 1 = 2}\ .$$

(6) La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si les dimensions des sous-espaces propres (non réduits au vecteur nul) sont égales à la multiplicité algébrique des valeurs propres dans le polynômes caractéristique. Ici la dimension de E_1 est 1 et la question précédente montre que la dimension de E_3 est 2. Donc la matrice M est diagonalisable.

(7) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par le vecteur $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}(\{\vec{u_1}\})} .$$

(8) On pose

$$\vec{u_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}' := \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leurs valeurs propres.

Un calcul immédiat montre que

$$\boxed{M\vec{u_1} = \vec{u_1}, \quad M\vec{u_2} = 3\vec{u_2}, \quad M\vec{u_3} = 3\vec{u_3}} .$$

Comme ces trois vecteurs ne sont pas nuls, ce sont des vecteurs propres de M, de valeurs propres respectives $1, 3$ et 3.
Comme les deux derniers vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants. D'après la question précédente, le vecteur $\vec{u_1}$ est un vecteur propre de valeur propre 1 et les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont des vecteurs propres de valeur propre 3. Finalement, comme l'union de familles libres de vecteurs propres associée à des valeurs propres distrinctes est encore une famille libre, la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Le fait que $\mathcal{B}'$ possède 3 vecteurs implique qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. (On peut aussi échelonner la matrice P).

(9) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ de la base $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage P vaut

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} .$$

(10) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

La matrice inverse de P vaut

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} .$$

(11) Calculer le produit des matrices $P^{-1}MP$. Après avoir fait le calcul, justifier pourquoi votre résultat est juste.

Le calcul donne

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} .$$

Ce résultat est cohérent avec l'interprétation suivante. Le produit de matrices $P^{-1}MP$ représente l'endomorphisme $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$, dans la base $\mathcal{B}'$. Comme la base $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres de valeurs propres respectives 1, 3 et 3, le produit $P^{-1}MP$ est égal à la matrice diagonale

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

(12) Calculer les puissances M^k de la matrice M, pour $k \geq 1$.

Posons $\Delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La question précédente montre que $P^{-1}MP = \Delta$, d'où $M = P\Delta P^{-1}$. Ceci implique que la matrice M^k est égale à

$$\boxed{M^k = P\Delta^k P^{-1}} = \begin{pmatrix} 2-3^k & -2+2.3^k & 1-3^k \\ 2-2.3^k & -2+3.3^k & 1-3^k \\ 2-2.3^k & -2+2.3^k & 1 \end{pmatrix}.$$