Examen Final (Décembre 2011)

Questions de cours.

(1) Un produit scalaire est une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie trois propriétés. Donner ces trois propriétés (noms et définitions).

Un produit scalaire est une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$
- ◇ symétrique : $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\vec{y}, \vec{x}),\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$,
- ◇ définie : $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- ◇ positive : $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0,\ \forall \vec{x} \in E$.

(2) Énoncer le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.

Tout matrice symétrique admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Exercice 1 (*Forme bilinéaire*)**.**

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 2. On considère l'application

$$\begin{cases} \Phi \ : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & \Phi(P, Q) := 2P(0)Q(2) - 6P(1)Q(0)\ . \end{cases}$$

(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$? (Justifier votre réponse.)

Comme la famille à 3 éléments $\{1, X, X^2\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$, ce dernier est de dimension 3.

(2) L'application Φ est-elle bilinéaire ? (Dans les deux cas, le démontrer.)

Le calcul suivant montre que l'application Φ est linéaire à gauche

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= 2(\lambda_1 P_1(0) + \lambda_2 P_2(0))Q(2) - 6(\lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1))Q(0) \\ &= \lambda_1\big(2P_1(0)Q(2) - 6P_1(1)Q(0)\big) + \lambda_2\big(2P_2(0)Q(2) - 6P_2(1)Q(0)\big) \\ &= \lambda_1 \Phi(P_1, Q) + \lambda_2 \Phi(P_2, Q). \end{aligned}$$

Un calcul similaire montre la linéarité à droite. La forme Φ est donc bilinéaire.

(3) L'application Φ est-elle symétrique ? (Dans les deux cas, le démontrer.)

L'application Φ n'est pas symétrique car, en général, on a

$$\Phi(P, Q) = 2P(0)Q(2) - 6P(1)Q(0) \neq \Phi(Q, P) = 2Q(0)P(2) - 6Q(1)P(0)\ .$$

Par exemple, si on considère $P = 1$ et $Q = X$, on a alors

$$\Phi(1, X) = 4 \neq -6 = \Phi(X, 1)\ .$$

(4) Écrire la matrice $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de la forme bilinéaire Φ dans la base canonique
$$\mathcal{B} := \{1,\ X,\ X^2\}$$
de $\mathbb{R}_2[X]$.

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ est formée des valeurs prises par la forme bilinéaire Φ sur les paires de vecteurs de $\{1,\ X,\ X^2\}$; à la i$^{\text{ème}}$ ligne et j$^{\text{ème}}$ colonne, on place le coefficient $\Phi(X^{i-1}, X^{j-1})$:
$$\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}}\ .$$

(5) Quel est le rang de la forme bilinéaire Φ ?

Par définition, le rang de la forme bilinéaire Φ est le rang de la matrice M qui vaut 2.

(6) Montrer que la famille
$$\mathcal{B}' := \{1,\ X-1,\ (X-1)^2\}$$
est une base et donner la matrice de passage $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$.

La matrice de passage P est formée des coefficients des vecteurs de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\ .$$
Comme cette matrice est de rang maximal (3), alors la famille $\mathcal{B}'$ est un base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(7) Donner la matrice $N := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ de la forme bilinéaire Φ dans la base $\mathcal{B}'$.

D'après un théorème du cours, on sait que la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ est donnée par
$$\begin{aligned} N = {}^tPMP \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ -6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(8) Décrire la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire Φ.

Par définition, la forme quadratique q associée à une forme bilinéaire Φ est
$$\boxed{\begin{array}{cccl} q & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & q(P) := \Phi(P,P) = 2P(0)P(2) - 6P(1)P(0) = 2P(0)(P(2) - 3P(1))\ . \end{array}}$$

On considère la forme bilinéaire symétrique
$$\left\{ \begin{array}{cccl} \Psi & : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \mapsto & \Phi(P,Q) := P(0)Q(2) + P(2)Q(0) - 3P(0)Q(1) - 3P(1)Q(0)\ . \end{array} \right.$$

(9) Montrer que la forme bilinéaire Ψ est la forme polaire de la forme quadratique q.

La forme quadratique associée à Ψ est égale à q :
$$\Psi(P,P) = P(0)P(2) + P(2)P(0) - 3P(0)P(1) - 3P(1)P(0) = 2P(0)(P(2) - 3P(1)) = q(P)\ .$$
On sait qu'il n'y a qu'une seule forme bilinéaire symétrique qui donne une forme quadratique donnée. Dans le cas de la forme quadratique q, il s'agit de la forme bilinéaire Ψ ; c'est donc bien la forme polaire associée à q.

Exercice 2 (*Diagonalisation des matrices*).

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le rang de la matrice $M - 3I$.

La matrice $M - 3I$ est

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

En ajoutant à la première colonne, les deux autres colonnes, on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

qui est de rang 2. Comme les opérations par colonnes ne changent pas le rang d'une matrice, la matrice $M - 3I$ est de rang 2.

(2) Est-ce que 3 est une valeur propre de M ? Si oui, quelle est la dimension du sous-espace propre E_3.

Le théorème du rang appliqué à la matrice $M - 3I$ donne

$$3 = \dim \operatorname{Ker}(M - 3I) + \operatorname{rg}(M - 3I) ,$$

ce qui permet de conclure que la dimension du noyau de $M - 3I$ vaut 1. Il existe donc des vecteurs X non nuls, tels que $MX = 3X$, c'est-à-dire des vecteurs propres de valeur propre 3. Le sous-espace propre $E_3 = \operatorname{Ker}(M - 3I)$ est de dimension 1.

(3) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

Par définition, le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est le déterminant de la matrice $M - XI$. Il est égal à

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} .$$

En ajoutant à la première colonne, les deux autres colonnes, on trouve

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 3-X & 2-X & 0 \\ 3-X & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} .$$

Enfin, en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\boxed{\chi_M(X) =} (3-X)(-(2-X) + (2-X)(1-X)) = \boxed{(3-X)X(X-2)}$$

(4) Déterminer le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Le spectre de M est égal à l'ensemble des racines du polynôme caractéristiques soit

$$\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{0, 2, 3\}} .$$

(5) Peut-on conclure que la matrice M est diagonalisable en utilisant seulement la forme du polynôme caractéristique ?

Oui, comme le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, alors cela implique que la matrice M est diagonalisable. (Dans ce cas, les trois sous-espaces propres non-triviaux E_0, E_2 et E_3 sont de dimension 1 et ils engendrent tout l'espace $\mathbb{R}^3$.)

On considère la base $\mathcal{F}$ suivante

$$\vec{f}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(6) À partir de cette base, construire une base orthonormée $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique). Donner le nom de l'algorithme que vous utiliser.

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{F}$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La norme du premier vecteur est $||\vec{f}_1|| = \sqrt{2}$. On pose donc

$$\boxed{\vec{u}_1 := \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \ .$$

Soit $F_1 = \mathrm{Vect}(\{\vec{u}_1\})$ la droite engendrée par $\vec{u}_1$. La projection orthogonale de $\vec{f}_2$ sur F_1 est

$$\mathrm{proj}^{\perp}_{F_1}(\vec{f}_2) = \langle \vec{f}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Le vecteur

$$\vec{f}_2 - \mathrm{proj}^{\perp}_{F_1}(\vec{f}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonal à $\vec{u}_1$. Sa norme vaut $\sqrt{3}$; on le normalise pour obtenir le deuxième vecteur

$$\boxed{\vec{u}_2 := \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \ .$$

Soit $F_2 = \mathrm{Vect}(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ le plan engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La projection orthogonale de $\vec{f}_3$ sur F_2 est

$$\mathrm{proj}^{\perp}_{F_2}(\vec{f}_3) = \langle \vec{f}_3, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{f}_3, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = 2. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Le vecteur

$$\vec{f}_3 - \mathrm{proj}^{\perp}_{F_2}(\vec{f}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$. Sa norme vaut $\sqrt{6}$; on le normalise pour obtenir le troisième vecteur

$$\boxed{\vec{u}_3 := \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \ .$$

Au final, la famille $\boxed{\mathcal{U} := \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}}$ $\underline{\text{forme une base orthonormée de } \mathbb{R}^3}$.

(7) La base orthonormée $\mathcal{U}$ est-elle une base de diagonalisation de M, c'est-à-dire une base de vecteurs propres de M ?

Un calcul direct montre que

$$\begin{cases} M\vec{u}_1 = 2\vec{u}_1 \\ M\vec{u}_2 = 3\vec{u}_2 \\ M\vec{u}_3 = 0 = 0\vec{u}_3 \ . \end{cases}$$

La base $\mathcal{U}$ est donc bien $\underline{\text{une base de vecteurs propres de la matrice } M}$.