Examen Final (Décembre 2011)

Durée 2 heures

Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront également évaluées. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.

(1) Donner la définition de forme quadratique.

(2) Donner un exemple de forme quadratique.

Exercice 1 (*Espace euclidien*).

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 3. On considère l'application

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \langle \text{-}, \text{-} \rangle & : & \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle := \displaystyle\int_0^1 xP(x)Q(x)dx \ . \end{array}\right.$$

(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$? (Justifier votre réponse.)

(2) Montrer qu'un polynôme P vérifie $\langle P, P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2 dx = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul $P = 0$.

(3) Montrer que l'application $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

(4) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B}}(\langle \text{-}, \text{-} \rangle)$ de la forme bilinéaire $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ dans la base canonique

$$\mathcal{B} := \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$$

de $\mathbb{R}_3[X]$.

(5) La base canonique $\mathcal{B} := \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle orthonormée pour le produit scalaire $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$?

On considère le sous-espace vectoriel F engendré par les polynômes suivants

$$F := Vect(\{1,\ X\}) \ .$$

(6) Donner une base orthonormée de F pour le produit scalaire $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$.

(7) Calculer la projection orthogonale $\mathrm{proj}_F^{\perp}(X^2)$ de X^2 sur F.

(8) Donner une base orthogonale du sous-espace vectoriel $Vect(\{1,\ X, X^2\})$ engendré par les polynômes 1, X et X^2.

Exercice 2 (*Diagonalisation des matrices*).

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

(2) Déterminer le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres.

(3) Est-ce que la matrice M est trigonalisable ? Énoncer précisement le théorème que vous utilisez.

(4) Déterminer le rang de la matrice $M - 3I$.

(5) En conclure le dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3. Préciser le théorème que vous appliquez.

(6) La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

(7) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

(8) On pose

$$\vec{u_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}' := \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leurs valeurs propres.

(9) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ de la base $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(10) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

(11) Calculer le produit des matrices $P^{-1}MP$. Après avoir fait le calcul, justifier pourquoi votre résultat est juste.

(12) Calculer les puissances M^k de la matrice M, pour $k \geq 1$.