# Examen Final (Décembre 2012)

*Durée 2 heures*

**Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront également évaluées. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.**

**L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.**

**Questions de cours.**

(1) Un produit scalaire est une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie trois propriétés. Donner ces trois propriétés (noms et définitions).

(2) Énoncer le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.

**Exercice 1** (*Forme bilinéaire*)**.**

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 2. On considère l'application

$$\begin{cases} \Phi \ : \ \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (P, Q) & \mapsto \quad \Phi(P, Q) := 2P(0)Q(2) - 6P(1)Q(0) \ . \end{cases}$$

(1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ ? (Justifier votre réponse.)

(2) L'application $\Phi$ est-elle bilinéaire ? (Dans les deux cas, le démontrer.)

(3) L'application $\Phi$ est-elle symétrique ? (Dans les deux cas, le démontrer.)

(4) Écrire la matrice $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de la forme bilinéaire $\Phi$ dans la base canonique

$$\mathcal{B} := \{1,\ X,\ X^2\}$$

de $\mathbb{R}_2[X]$.

(5) Quel est le rang de la forme bilinéaire $\Phi$ ?

(6) Montrer que la famille

$$\mathcal{B}' := \{1,\ X - 1,\ (X-1)^2\}$$

est une base et donner la matrice de passage $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$.

(7) Donner la matrice $N := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ de la forme bilinéaire $\Phi$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(8) Décrire la forme quadratique $q$ associée à la forme bilinéaire $\Phi$.

On considère la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{cases} \Psi \ : \ \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad (P, Q) & \mapsto \quad \Psi(P, Q) := P(0)Q(2) + P(2)Q(0) - 3P(0)Q(1) - 3P(1)Q(0) \ . \end{cases}$$

(9) Montrer que la forme bilinéaire $\Psi$ est la forme polaire de la forme quadratique $q$.

**Exercice 2** (*Diagonalisation des matrices*)**.**

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le rang de la matrice $M - 3I$.

(2) Est-ce que 3 est une valeur propre de $M$ ? Si oui, quelle est la dimension du sous-espace propre $E_3$.

(3) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M$ de la matrice $M$.

(4) Déterminer le spectre de $M$, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

(5) Peut-on conclure que la matrice $M$ est diagonalisable en utilisant seulement la forme du polynôme caractéristique ?

On considère la base $\mathcal{F}$ suivante

$$\vec{f_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(6) À partir de cette base, construire une base orthonormée $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique). Donner le nom de l'algorithme que vous utiliser.

(7) La base orthonormée $\mathcal{U}$ est-elle une base de diagonalisation de $M$, c'est-à-dire une base de vecteurs propres de $M$ ?

| **Cours** | **1** | **2** | **Ex 1** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **Ex 2** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Barème | 1,5 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 1 | 1 | | 1 | 1,5 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |