L2 MASS - Algèbre linéaire Année 2012-2013

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1

APPLICATIONS ENSEMBLISTES ET FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 (Opérations ensemblistes I)**.**
On considère les ensembles suivants
A : l'ensemble des entiers relatifs pairs $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$,
B : l'ensemble des entiers relatifs impairs $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$,
C : l'ensemble des entiers naturels de 1 à 10,
D : l'ensemble des nombres réels positifs.
Décrire les ensembles $C \cup A$, $C \cup B$, $C - B$, $A \cap D$, $B \cup D$, $A \cup B$ et $A \cap B$.
(Ne pas hésiter à utiliser une représentation graphique, comme l'axe des réels, par exemple).

Exercice* 2 (Opérations ensemblistes II)**.** [1]
Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un l'ensemble E. Démontrer les équalités présentes ci-dessous :

(1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
(2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 3 (Application ensembliste)**.**
Nous allons modéliser par une application les chaînes de télévision que j'ai regardées pendant la semaine dernière. Chaque soir, j'ai regardé un film ou une émission proposé par une de ces chaînes. Appelons les chaînes 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Lundi, mercredi et jeudi, j'ai regardé la première chaîne. Mardi et vendredi, j'ai regardé la deuxième chaîne. Samedi, j'ai suivi le programme de la cinquième chaîne et dimanche celui de la sixième.
Posons f la fonction de l'ensemble $\{\text{lundi}, \text{mardi}, \ldots, \text{dimanche}\}$ à $\{1, 2, \ldots, 6\}$ qui associe à un jour la chaîne regardée.

(1) Représenter cette application (avec des ensembles et des flèches).
(2) Quelle est l'image $\mathrm{Im} f$ de f ? À quoi correspond cet ensemble en termes de chaîne de télévision ?
(3) Décrire les ensembles d'antécédents $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(4)$ de 1, 2 et 4. À quoi correspondent ces ensembles dans la réalité ?
(4) Cette fonction est-elle surjective et qu'est-ce-que cela signifie-t-il ici ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction surjective ?
(5) Cette fonction est-elle injective et qu'est-ce-que cela signifie-t-il ici ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction injective ?
(6) Cette fonction est-elle bijective ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction bijective ?

Exercice 4 (Fonction bijective)**.**
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) := 5x + 17$.

(1) Repésenter graphiquement cette fonction.

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

(2) Fixons un $y \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $f(x) = 5x + 17 = y$ où x est l'inconnue. Posons $\mathcal{S}_y = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 17 = y\}$ l'ensemble des solutions de cette équation. Déterminer $\mathcal{S}_2$ puis $\mathcal{S}_y$.

(3) Montrer que f est bijective en utilisant deux méthodes différentes (celle que vous avez apprise les années passées et en appliquant directement la définition du cours).

(4) Déterminer la fonction réciproque f^{-1}. Vérifier par le calcul que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice* 5 (Valeur absolue)**.**
On rappelle que la fonction *valeur absolue* $| \ |$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0, \text{ on pose } |x| := x, \\ \text{pour } x \leqslant 0, \text{ on pose } |x| := -x. \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|. \end{cases}$

(2) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction valeur absolue. Distinguer 3 cas, les représenter sur le graphe de la question précédente. Cette fonction est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(3) On restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction f définie par $\begin{cases} f : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$
Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction f. (Distinguer plusieurs cas.) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(4) On restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction g définie par $\begin{cases} g : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$
Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, combien y-a-t-il d'antécédents de y par la fonction g. La fonction g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ? À quelle fonction usuelle est égale la fonction g ?

Exercice 6 (Valeurs des fonctions trigonométriques I)**.**
Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques cos, sin et tan pour les angles suivants :

$$\theta = 0; \ \frac{\pi}{6}; \ \frac{\pi}{4}; \ \frac{\pi}{3}; \ \frac{\pi}{2}.$$

et les recenser dans un tableau.

Exercice* 7 (Relations cosinus-sinus)**.**

(1) Montrer que $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et que $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$.

(2) Montrer que $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$ et que $\sin\theta = -\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$.

(3) Montrer que $\cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$ et que $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$.

(4) Montrer que $\cos\theta = -\cos(\pi + \theta)$ et que $\sin\theta = -\sin(\pi + \theta)$.

Exercice 8 (Valeurs des fonctions trigonométriques II)**.**
Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques cos, sin et tan pour les angles suivants :

$$\theta = \frac{2\pi}{3}; \ \frac{5\pi}{6}; \ \frac{\pi}{12}.$$

Cours et TDs : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).

Page web du cours :

`http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`

Pour la retrouver rapidement : Taper “Bruno Vallette” sur Google. Cliquez sur le premier lien proposé, il s'agit de mon site internet `http ://math.unice.fr/∼brunov`. Le lien vers la page du cours se trouve en bas de l'écran, dans l'onglet “Enseignement”.