FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 10

BASES ORTHONORMÉES

Exercice 1 (Polynômes orthogonaux).
On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{llll} \langle \text{-}, \text{-} \rangle : & \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & \langle P, Q \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx \ . \end{array} \right.$$

(1) Montrer que l'application $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Le sous-espace $E := \big(\mathbb{R}_3[X], \langle \text{-}, \text{-} \rangle\big)$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 muni de la restriction de $\langle \text{-}, \text{-} \rangle$ est-il un espace euclidien ?

(3) La base

$$\mathcal{B} := \{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$$

de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle orthogonale ?

(4) Déterminer tous les vecteurs orthogonaux à X^2.

On considère la famille de polynômes

$$\mathcal{L} := \left\{1,\ X,\ \frac{1}{2}(3X^2 - 1),\ \frac{1}{2}(5X^3 - 3X)\right\} \ .$$

Ces polynômes sont les premiers d'une famille infinie appelés les *polynômes de Legendre*.

(5) Montrer que $\mathcal{L}$ est une base orthogonale de E.

(6) Est-elle orthonormée ?

Exercice 2 (Fonctions trigonométriques).
On travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ formé des applications continues $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ vers $\mathbb{R}$. On le munit du produit scalaire

$$\left\{ \begin{array}{llll} \langle \text{-}, \text{-} \rangle : & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & \langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \ . \end{array} \right.$$

(1) Montrer que la famille

$$\mathcal{F} := \{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t,\ \ldots,\ \sin t,\ \sin 2t,\ \sin 3t,\ \ldots\} \ .$$

est orthogonale.

(2) Comment peux-tu modifier $\mathcal{F}$ pour obtenir une famille orthonormée ?

Exercice 3 (Base orthonormée de $M_2(\mathbb{R})$).
Avec les notations de l'exercice 2 de la feuille 9, on travaille dans l'espace euclidien $M_2(\mathbb{R})$, formé des matrices de taille 2×2, muni du produit scalaire

$$\left\{ \begin{array}{llll} \langle \text{-}, \text{-} \rangle : & M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto & \langle A, B \rangle := \mathrm{tr}({}^{t}AB) \ . \end{array} \right.$$

(1) Trouver une base orthonormée de $\big(M_2(\mathbb{R}),\ \langle \text{-}, \text{-} \rangle\big)$.

Exercice 4 (Matrice symétrique)**.**
On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

On appelle Φ l'application bilinéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Que vaut $\Phi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big)$?
(2) Montrer, sans calcul et en appliquant le théorème du rang, que 1 est valeur propre de M.
(3) Quelle est l'autre valeur propre ?
(4) Démontrer, par 2 méthodes différentes, que la matrice M est diagonalisable.
(5) Décrire les deux sous-espaces propres E_1 et E_{10}.
(6) Trouver une base orthonormée de E_1.
(7) Montrer que tout vecteur propre $X \in E_1$ de valeur propre 1 est orthogonal à tout vecteur propre $Y \in E_{10}$ de valeur propre 10.
(8) En conclure qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de M. Donner en une.
(9) Donner l'expression de la forme bilinéaire Φ dans cette nouvelle base.

Exercice 5 (Réduction des matrices symétiques)**.**
On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 1$.

(1) Montrer que tous les vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^n$ vérifient

$$\langle MX, Y \rangle = \langle X, {}^tMY \rangle$$

(2) En déduire que toute paire $\{X, Y\}$ de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice 6 (Matrice orthogonale)**.**
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta \in O(3)$ est orthogonale.
(2) Que pouvez-vous en conclure des vecteurs colonnes de R_θ ?
(3) Décrire géométriquement l'application linéaire

$$\left\{ \begin{array}{llll} \rho_\theta : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & X & \mapsto & R_\theta X . \end{array} \right.$$

(4) Redémontrer ainsi que ρ_θ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`