FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 11

PROJECTION ORTHOGONALE ET ALGORITHME DE GRAM-SCHMIDT

Exercice 1 (*Algorithme d'othonormalisation de Gram-Schmidt*).
On travaille dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ muni de son produit scalaire canonique. On considère la famille $\mathcal{F} := \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ formée des 3 vecteurs suivants

$$\vec{f_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- ⋄ Appliquer l'algorithme d'othonormalisation de Gram-Schmidt à ces 3 vecteurs pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (*Projection orthogonale*).
On reprend les notations de l'exercice 2 de la feuille 10. On travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ formé des applications continues $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ vers $\mathbb{R}$. On le munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt .$$

- ⋄ Calculer la projection orthogonale de la fonction $f(t) := t^2$ sur l'espace vectoriel engendré par $\{1, \cos t, \sin t\}$.

Exercice 3 (*Changement de base*).
On considère l'application bilinéaire $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$Mat_{\mathcal{B}}(\Phi) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\Phi((1, 1, 5), (-1, 2, 1))$.
(2) Vérifier que la famille $\mathcal{F} := \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(3) Calculer la matrice $Mat_{\mathcal{F}}(\Phi)$ de Φ dans la base $\mathcal{F}$.
(4) Calculer la signature de Φ.

Exercice 4 (*Signature*).
On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application

$$\begin{cases} \Phi : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto & P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) . \end{cases}$$

(1) Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
(2) Déterminer la matrice $M := Mat_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de l'application billinéaire Φ dans la base canonique $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$.
(3) Diagonaliser la matrice M.
(4) Trouver une base orthonormée pour le produit scalaire Φ.
(5) Calculer la signature de Φ.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`