FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

NOMBRES COMPLEXES ET POLYNÔMES

Exercice 1 (Opérations élémentaires).
Soient les nombres complexes

$$z_1 := 2 - 3i, \quad z_2 := 3 + 4i \quad \text{et} \quad z_3 := 1 + i.$$

Calculer les nombres complexes suivants

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_3, \quad z_1.z_2, \quad z_1.z_3, \quad \frac{z_1}{z_3}, \quad z_1.\bar{z}_1, \quad z_1^3 \quad \text{et} \quad z_1.\bar{z}_3 \ .$$

Exercice 2 (Forme algébrique).
Calculer, sous forme algébrique $x + iy$, les nombre complexes suivants

$$(1+2i)^2, \quad (1+i)^3, \quad \frac{1}{1+3i}, \quad \frac{1+i}{2+i}, \quad i^{33}, \quad \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2}, \quad (1+i)^{-3} \quad \text{et} \quad i^{-11} \ .$$

Exercice 3 (Exponentielle complexe).
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$4e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad 6e^{3\pi i}, \quad e^{-\frac{3\pi i}{4}}, \quad e^{-\frac{6\pi i}{4}} \quad \text{et} \quad 3e^{-\frac{5\pi i}{3}} \ .$$

Exercice 4 (Forme polaire).
Mettre sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, c'est-à-dire déterminer le module et l'argument, chacun des nombres complexes suivants

$$1 - i, \quad \sqrt{3} + 3i, \quad \frac{\sqrt{3}+3i}{1-i}, \quad 1 + i, \quad -9 \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \ .$$

Exercice 5 (Puissance de nombre complexe).
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

$$(1-i)^5, \quad (\sqrt{3}+3i)^7, \quad (1+i)^{-14}, \quad (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{13} \ .$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 6 (Formule trigonométrique).
On pose

$$z_1 := \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 := 1 - i \ .$$

(1) Écrire les nombres z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

(2) Écrire le quotient $Z := \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

(3) En conclure les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice* 7 (Conjugaison).[1]
Simplifier l'expression

$$\frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x} \ .$$

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

Exercice 8 (Racine de l'unité).

(1) Pour n entier compris entre 2 et 6, déterminer tous les nombres complexes z qui vérifient l'équation
$$z^n = 1 \ .$$
On exprimera chacun d'eux sous forme polaire et sous forme algébrique.

(2) Représenter graphiquement l'image dans le plan complexe de chacune de ces solutions.

Exercice 9 (Formule de de Moivre).
En utilisant la formule de de Moivre et celle du binôme de Newton, exprimer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 10 (Linéarisation).
Linéariser les expressions trigonométriques suivantes, c'est-à-dire les exprimer en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$,
$$\sin^3\theta, \quad \sin\theta\cos^3\theta \quad \text{et} \quad \cos^5\theta \ .$$

Exercice* 11 (Plan complexe).
Interpréter graphiquement dans le plan complexe les relations suivantes

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,

(2) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$,

(3) $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}z$,

(4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$,

(5) $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.

Exercice 12 (Racine carrée).
Calculer, sous forme polaire ou sous forme algébrique, les racines carrés des nombres complexes suivants
$$z_1 := i, \quad z_2 := 9, \quad z_3 := -9, \quad z_4 := -3-4i, \quad z_5 := -1+i\sqrt{3}, \quad z_6 := 3+2i \quad \text{et} \quad z_7 := -5-12i \ .$$

Exercice 13 (Équation polynômiale).
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations polynômiales suivantes. On écrira les solutions sous forme algébrique ou sous forme polaire.

(1) $3z^2 + 3z + 2 = 0$,

(2) $z^2 - 4iz - 2 = 0$,

(3) $z^3 = -1$,

(4) $z^4 = \frac{i}{16}$,

(5)* $z^5 = 32 + 32i$.

Exercice 14 (Factorisation).
Factoriser complétement les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire trouver toutes les racines réelles et complexes.

(1) $X^3 - 5X^2 + 7X - 3$,

(2) $X^3 - 11X^2 + 39X - 45$,

(3) $X^3 - 3X^2 + 9X + 13$.

Exercice* 15 (Division euclidienne).
Calculer la division euclidienne du polynôme $4X^5 + X^3 - 2$ par le polynôme $X^2 + X + 1$.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`