FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

SOMME DIRECTE ET APPLICATION LINÉAIRE

Exercice 1 (Somme directe)**.**
Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad V := Vect(\{(2, 0, 0)\})$$

sont en somme directe.

Exercice 2 (Supplémentaire)**.**
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On considère la droite vectorielle d'équation

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\} \ .$$

(1) Trouver un supplémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$.
(2) Est-il unique ? Sinon, combien y en a-t-il ?

Exercice 3 (Projections)**.**
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère la droite D d'équations

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0;\ x + 2y + z = 0\}$$

et le plan P d'équation

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\} \ .$$

(1) Montrer qu'ils sont supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner l'expression des projections proj_D^P sur D parallèlemenet à P et proj_P^D sur P parallèlemenet à D.

Exercice* 4 (Fonctions paires et impaires)**.** [1]
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on considère les deux sous-espaces vectoriels formés respectivement des fonctions paires et impaires, cf. Exercice 5, Feuille 3 :

$$\mathcal{P} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\} \ .$$

Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{C}$.

Exercice 5 (Dérivation)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, on considère l'application "dérivation" suivante

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{der} & : & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ & & P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mapsto P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} \ . \end{array} \right.$$

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

(1) L'application der est-elle linéaire ?

(2) Calculer son image Im(der). Cette application est-elle un épimorphisme ?

(3) Calculer son noyau Ker(der). Cette application est-elle un monomorphisme ?

(4) L'application der est-elle un isomorphisme ?

Exercice* 6 (Décalage)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, on considère l'application "décalage" suivante

$$\begin{cases} \mathrm{dec} & : & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ & & P(X) \mapsto P(X+1) \ . \end{cases}$$

(1) L'application dec est-elle linéaire ?

(2) Calculer son image Im(dec). Cette application est-elle un épimorphisme ?

(3) Calculer son noyau Ker(dec). Cette application est-elle un monomorphisme ?

(4) L'application dec est-elle un isomorphisme ?

(5) Si oui, décrire son application linéaire réciproque.

Exercice 7 (Application linéaire matricielle)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{E} := \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ la base canonique

$$e_1 := (1,0,0), \quad e_2 := (0,1,0), \quad e_3 := (0,0,1) \ .$$

On considère la famille $\mathcal{F} := \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ définie par

$$f_1 := (1,0,-1), \quad f_2 := (0,1,2), \quad f_3 := (2,1,1) \ .$$

Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie

$$e_1 \mapsto f_1, \quad e_2 \mapsto f_2, \quad e_3 \mapsto f_3 \ .$$

(1) Montrer que cette application linéaire est de la forme

$$\begin{cases} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & & X \mapsto MX \ , \end{cases}$$

où $M \in M_3(\mathbb{R})$ est une matrice 3×3 que l'on explicitera.

(2) Décrire l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f et en donner une base.

(3) L'application f est-elle un épimorphisme ?

(4) Décrire le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f et en donner une base.

(5) L'application f est-elle un monomorphisme ?

(6) L'application f est-elle un isomorphisme ?

(7) Si oui, décrire l'application réciproque.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).

Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`