FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 6

RANG ET APPLICATION MATRICIELLE

Exercice 1 (Dérivation bis).
On reprend les notations de l'exercice 5 de la feuille 5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application linéaire "dérivation" suivante

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \text{der} & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \mapsto & P' \ . \end{array} \right.$$

(1) Écrire la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{der})$ de l'application linéaire der dans la base $\mathcal{B} := \{1, X, X^2, X^3\}$.

(2) En utilisant la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{der})$ répondre aux questions suivantes. L'application linéaire der est-elle un épimorphisme ? L'application linéaire der est-elle un monomorphisme ? L'application linéaire der est-elle un isomorphisme ?

(3) Quelle est la dimension de l'image de der ?

(4) Quelle est la dimension du noyau de der ?

Exercice 2 (Décalage bis).
On reprend les notations de l'exercice 6 de la feuille 5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application linéaire "décalage" suivante

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \text{dec} & : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P(X) & \mapsto & P(X+1) \ . \end{array} \right.$$

(1) Écrire la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{dec})$ de l'application linéaire dec dans la base $\mathcal{B} := \{1, X, X^2, X^3\}$.

(2) En utilisant la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{dec})$, calculer l'image par dec du polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 7$.

(3) Reprendre les questions de l'exercice 6 de la feuille 5 avec cette représentation matricielle de l'application dec.

(4) Montrer que la famille

$$\{1,\ 1+X,\ 1+2X+X^2,\ 1+3X+3X^2+X^3\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 (Matrice associée à une application linéaire)**.**
On considère l'application suivante

$$\left\{\begin{array}{lllll} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, 2x+4y+6z, -x+y+3z, 3x-2y-7z)\ . \end{array}\right.$$

(1) Montrer que l'application f est linéaire.

(2) L'application linéaire f est-elle surjective ?

(3) Écrire la matrice $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f)$ de l'application linéaire f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

(4) Décrire l'image de l'application f en utilisant la matrice $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f)$.

(5) En déduire la dimension du noyau de f.

(6) Décrire le noyau de l'application f en utilisant la matrice $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f)$.

Exercice 4 (Rang)**.**
On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le déterminant de M.

(2) Quel est le rang de la matrice M ?

(3) Montrer que la famille

$$\{(1,4,6),\ (2,0,7),\ (3,5,8)\}$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Nombre complexe)**.**
On considère l'application suivante

$$\left\{\begin{array}{lllll} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \bar{z}+iz\ . \end{array}\right.$$

(1) Montrer que l'application f est $\mathbb{R}$-linéaire.

(2) Écrire la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base canonique $\mathcal{B} := \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$.

(3) L'application f est-elle un isomorphisme ?

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`