L2 MASS - Algèbre linéaire — Année 2012-2013

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 7

APPLICATION MATRICIELLE, TRACE ET DÉTERMINANT

Exercice 1 (Changement de base)**.**
On considère la base suivante de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} := \{(1,0,2),\ (2,1,-1),\ (3,0,7)\}\ .$$

(1) Écrire les coordonnées d'un élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.
On considère

$$U := Vect(\{(1,0,2)\}) \quad \text{et} \quad V := Vect(\{(2,1,-1),\ (3,0,7)\})\ .$$

(2) Décrire la projection proj_U^V sur U parallèlement à V.

Exercice 2 (Composées)**.**
Soient f et g des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices associées dans des bases données sont

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

Calculer les matrices représentant les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les mêmes bases.

Exercice 3 (Application linéaire et changement de bases)**.**
Soit $f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z,t) = (y+t-x, 2x+t, \frac{1}{2}x - z)\ .$$

(1) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}}(f)$ de l'application f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs

$$a_1 := (1,1,0,1),\ a_2 := (1,0,1,0),\ a_3 := (0,1,1,1),\ a_4 := (1,2,0,0)\ .$$

(2) Montrer que $\mathcal{A} := \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
On considère les vecteurs

$$b_1 := (2,0,0),\ b_2 := (0,1,1),\ b_3 := (1,1,0)\ .$$

(3) Montrer que $\mathcal{B} := \{b_1,b_2,b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) Écrire la matrice $N := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f)$ de l'application f dans ces deux bases, à partir de sa définition.

(5) Donner les matrices de passage P et Q des bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

(6) Retrouver la matrice N grâce aux matrices M, P et Q.

Exercice* 4 (Application linéaire matricielle)**.** [1]
On reprend les notations de l'exercice 7 de la feuille 5. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{E} := \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ la base canonique où

$$e_1 := (1,0,0), \quad e_2 := (0,1,0), \quad e_3 := (0,0,1)\ .$$

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

On considère la famille $\mathcal{F} := \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ définie par

$$f_1 := (1, 0, -1), \quad f_2 := (0, 1, 2), \quad f_3 := (2, 1, 1) \ .$$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire représentée dans la base $\mathcal{F}$ par la matrice

$$A = Mat_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

(2) Donner une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f.

(3) Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ dans la base $\mathcal{F}$. [Pensez à utiliser l'exercice 7 de la feuille 5.]

(4) En déduire les coordonnés de $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_3})$ dans la base $\mathcal{F}$.

(5) Donner enfin les vecteurs $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_3})$ dans la base canonique $\mathcal{E}$.
On considère la matrice représentant l'application linéaire f dans la base canonique $\mathcal{E}$:

$$B := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \ .$$

(6) Décrire la matrice B.

(7) Décrire les matrices de passage

$$P := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{et} \quad P^{-1} = Mat_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \ .$$

(8) Retrouver la matrice B par un calcul à l'aide des matrices A, P et P^{-1}.

(9) Donner la matrice représentant l'application f avec pour base à la source $\mathcal{E}$ et pour base au but $\mathcal{F}$:

$$N := Mat_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) \ .$$

(10) Caculer les traces des matrices A, B et N.

(11) Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 5 (Sous-espace vectoriel)**.**
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 0, \ x - y + t + z = 0\} \ .$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en l'écrivant comme le noyau d'une application linéaire bien choisie.

(2) Calculer la dimension $\dim F$ du sous-espace vectoriel F.

Exercice 6 (Trace)**.**
On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$f(a + bX + cX^2 + dX^3) := d + \frac{a+b+c}{2} X^2 + (d - b)X^3 \ .$$

(1) Montrer que l'application f est linéaire.

(2) Calculer sa trace.

Exercice 7 (Méthode de Cramer)**.**
Décrire l'ensemble des solutions du système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 2y + z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 2 \ . \end{array} \right.$$

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`