UNIVERSITÉ PARIS 13 — MASTER 1 - ALGÈBRE II — Décembre 2015

EXAMEN

DURÉE 3 HEURES

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

✍

Exercice 1 (Diagonalisabilité).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ un matrice carrée à coefficients dans un corps finis.
Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^q = M$.

✍

Exercice 2 (Corps finis).

(1) Montrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

On en conclut que

$$\mathbb{F}_8 \cong \frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3 + X + 1)}$$

est un modèle du corps à 8 éléments. Dans ce modèle, on note x la classe de X.

(2) Calculer l'inverse de x^2.

✍

Exercice 3 (Exponentielle de matrices).

Montrer que la matrice réelle

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

n'est pas dans l'image de l'exponentielle des matrices réelles.

✍

Problème 1 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

Objectif. Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration, par une méthode de point fixe, du théorème affirmant que tout sous-groupe compact $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe d'un conjugué du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\dim \mathcal{V} = N$, et soit K un compact convexe (non vide) de $\mathcal{V}$.

(1) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{V}$ préservant K, $f(K) \subset K$. Montrer que f admet un point fixe dans K :

$$\exists\, x \in K,\ f(x) = x\ .$$

Indication. On pourra considérer une suite de la forme

$$x_k := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} f^i(x_0), \quad \text{où} \quad x_0 \in K\ .$$

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ préservant K, i.e. $\forall\, f \in \mathcal{G},\ f(K) \subset K$.

(2) Après choix d'une base de $\mathcal{V}$, on l'identifie à $\mathbb{R}^N$ pour lequel on considère la norme euclidienne $||X|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$, pour $X = (x_1, \ldots, x_N)$. Montrer que

$$||X||_{\mathcal{G}} := \mathrm{Max}_{f \in \mathcal{G}}\, ||f(X)||$$

définit une norme $\mathcal{G}$-invariante sur $\mathcal{V}$. (Il est équivalent de montrer que $X \mapsto ||X||^2_{\mathcal{G}}$ est une forme quadratique définie positive.)

(3) Décrire le cas d'égalité pour son inégalité triangulaire.

(4) Montrer qu'il existe, dans K, un point fixe commun à tous les éléments de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire

$$\exists\, x \in K,\ \forall f \in \mathcal{G}, \quad f(x) = x\ .$$

Pour pouvoir conclure en utilisant ce théorème de point fixe, nous allons en outre avoir besoin du théorème de Carathéodory, qui est l'affirmation suivante, ainsi que de son corollaire.

(5) Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ un sous-ensemble de $\mathcal{V}$. Montrer que tout élément de l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $N+1$ éléments de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{E}) = \left\{ \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1 \text{ et } \forall i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^+, x_i \in \mathcal{E} \right\}\ .$$

(6) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de $\mathcal{V}$ est encore un compact.

On va maintenant pouvoir démontrer le résultat principal. Soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous-groupe compact.

(7) Pour $A \in \mathrm{G}$ et pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique, on pose

$$\rho_A(S) := {}^tASA\ .$$

Montrer que ceci définit une application continue de la forme $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$, où on précisera $\mathcal{V}$, telle que

$$\forall\ (A, B) \in \mathrm{G}^2,\ \rho(BA) = \rho(A) \circ \rho(B)\ .$$

(8) Conclure en considérant l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{{}^tMM \mid M \in \mathrm{G}\}$.

———— ✍ ————