NOM : Licence de Sciences Économiques
PRÉNOM : Mathématiques L1
NUMÉRO D'ÉTUDIANT : Année 2006-2007

CONTRÔLE CONTINU 1

Exercice 1. On considère la fonction

$$\begin{cases} f \quad : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{3}{x-2} - 1. \end{cases}$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

$\mathbf{D_f} = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Quelles sont les valeurs de $\mathbb{R}$ atteintes par f ?

Fixons y dans $\mathbb{R}$ et cherchons à savoir s'il est atteint, c'est-à-dire cherchons à résoudre l'équation en x :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3}{x-2} - 1 = y \quad & \iff \quad \frac{3}{x-2} = y+1 \\ & \overset{y \neq -1}{\iff} \quad x - 2 = \frac{3}{y+1} \\ & \iff \quad \boxed{x = \frac{3}{y+1} + 2}. \end{aligned}$$

<u>Tout y différent de -1 est donc atteint une seule fois par la fonction f</u>. $\big($On a $f(\frac{3}{y+1} + 2) = y\big)$.

Si $y = -1$, l'équation est équivalente à $\frac{3}{x-2} = 0 \iff 3 = 0$, ce qui est impossible. L'équation $f(x) = -1$ n'a donc pas de solution, ce qui signifie que <u>la valeur -1 n'est pas atteinte</u> par la fonction f.

3) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

<u>La fonction f est injective</u> car tout y dans $\mathbb{R}$ admet zéro $(y = -1)$ ou un $(y \neq -1)$ antécédent par f.

<u>La fonction f n'est pas surjective</u> car il n'est pas vrai que tout $y \in \mathbb{R}$ a au moins un antécédent. <u>Par exemple, $y = -1$ d'en a aucun.</u>

4) On considère la fonction bijective

$$\begin{cases} g & : & \mathbb{R}-\{2\} & \rightarrow & \mathbb{R}-\{-1\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{3}{x-2}-1. \end{cases}$$

Décrire complètement la fonction réciproque de g.

Les résultats de la question 2 permettent de décrire complètement la fonction réciproque de g. On a

$$\begin{cases} g^{-1} & : & \mathbb{R}-\{-1\} & \rightarrow & \mathbb{R}-\{2\} \\ & & y & \mapsto & \dfrac{3}{y+1}+2. \end{cases}$$