

**FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2**

**Exercice 1.**

- (1) Tracer dans le plan  $\mathbb{R}^2$  la droite d'équation  $x_2 = 2x_1 + 1$ .
- (2) Représenter les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(1, 2)$  et  $(5, 0)$ . Donner l'équation de la droite passant par ces deux points.

**Exercice 2.**

- (1) On considère l'ensemble  $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$ . Représenter graphiquement cet ensemble. Cet ensemble est-il un ouvert? Décrire la frontière  $\text{Fr } A$  de l'ensemble  $A$ . L'ensemble  $A$  est-il un fermé? Que vaut le complémentaire  $A^c$ ?
- (2) On considère l'ensemble  $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq 0\}$ . Est-il un fermé de  $\mathbb{R}^2$ ? Est-il un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ?
- (3) On pose  $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = 0\}$ . Est-il fermé? Décrire la frontière  $\text{Fr } C$  de l'ensemble  $C$ . Est-il ouvert?
- (4) Soit  $D$  l'ensemble défini par  $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$ . Représenter graphiquement cet ensemble. Cette ensemble est-il ouvert? Est-il fermé?
- (5) Quelle figure décrit l'ensemble  $E$  défini par  $E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ ? Représenter cet ensemble. Décrire la frontière  $\text{Fr } E$  de l'ensemble  $E$ . Cet ensemble est-il fermé? Si oui, le démontrer. Est-il ouvert? Est-il borné?
- (6) Donner un exemple d'ensemble qui n'est pas borné?

**Exercice 3.** On considère les ensembles  $A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$  et  $A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$ .

- (1) Représenter graphiquement les ensembles  $A_1$  et  $A_2$  ainsi que leur intersection  $A_1 \cap A_2$  et leur union  $A_1 \cup A_2$ . Donner la définition de  $A_1 \cap A_2$  et de  $A_1 \cup A_2$  (sous la même que nous avons défini  $A_1$  et  $A_2$ ). Décrire le complémentaire de  $A_1 \cap A_2$ .
- (2) Montrer que  $A_1 \cap A_2$  est ouvert.
- (3) On considère  $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0 \text{ ou } x_2 \geq 0\}$ . Montrer que  $B$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 4.** On pose  $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5$  et  $g(x_1, x_2) := x_1x_2 - 5$ .

- (1) De quel type sont ces deux fonctions?
- (2) Que vaut la fonction  $f + g$ ? Calculer  $f(0, 0)$ ,  $f(1, -1)$ ?

**Exercice 5.** On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5}. \end{array} \right.$$

- (1) La fonction  $f$  est une fonction de quel type?
- (2) Quel est le domaine de définition de  $f$ ? Représenter graphiquement ce domaine. S'agit-il d'un ouvert? S'agit-il d'un fermé? Est-il borné?

**Exercice 6.** On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_2 - x_1^2}, \\ g : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1}. \end{array} \right.$$

- (1) De quel type sont ces deux fonctions?

- (2) Donner les domaines de définition de  $f$  et de  $g$ . Sont-ils des ouverts? Sont-ils fermés? Sont-ils bornés?
- (3) Calculer la somme des fractions rationnelles  $f + g$  et le quotient  $\frac{f}{g}$ .

**Exercice 7.** On considère la fonction

$$h : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + 5x_2^2}{4 - x_1^2 - x_2^2}.$$

- (1) Quel est le domaine de définition de  $h$ ? À quoi correspond ce domaine géométriquement? Est-il ouvert? Est-il fermé? Est-il borné?

On considère la fonction

$$k : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{h(x_1, x_2)}.$$

- (2) Quelle est le domaine de définition de  $k$ ? À quoi correspond ce domaine géométriquement? Est-il ouvert? Est-il fermé? Est-il borné?

**Exercice 8.** Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2 + y^2}. \end{array}$$

Quel est le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ ? Est-il ouvert? Est-il fermé? Est-il borné?