Licence de Sciences Économiques — Année 2005-2006

Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

Feuille de Travaux Dirigés 1

Exercice 1.
Donner un sous-ensemble à 5 éléments de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.
On considère les ensembles $A := \{-1, 0, 1, \frac{1}{2}, 2, 5\}$, $B := \{0, 2, 5\}$ et $C := \{-1, 0, 1\}$.
Montrer que B et C sont des sous-ensembles de A. Décrire $B \cup C$, $B \cap C$, $A - B$ et $A - C$.
Montrer que $A \subset \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationels. Calculer $A \cap \mathbb{N}$.

Exercice 3.
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) := (x+1)(x+2)$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) := \sqrt{x}$.
Quel est le domaine de définition de f et de g ? Décrire la composée $g \circ f$, sans oublier son domaine de définition.

Exercice 4.
On rappelle que la fonction *valeur absolue* $|\ |$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0, \text{ on pose } |x| := x, \\ \text{pour } x \leqslant 0, \text{ on pose } |x| := -x. \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|. \end{cases}$

(2) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction valeur absolue. Distinguer 3 cas, les représenter sur le graphe de la question précédente. Cette fonction est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(3) On restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction f définie par $\begin{cases} f : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction f. (Distinguer plusieurs cas.) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(4) On restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction g définie par $\begin{cases} g : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, combien y-a-t-il d'antécédents de y par la fonction g. La fonction g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ? À quelle fonction usuelle est égale la fonction g ?

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) := 5x + 17$.

(1) Montrer que f est bijective en utilisant deux méthodes différentes (celle que vous avez apprise les années passées et en appliquant directement la définition du cours).

(2) Déterminer la réciproque f^{-1}. Vérifier par le calcul que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 6.

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{cases}$

(1) Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que 1 est la seule valeur de $\mathbb{R}$ non atteinte par f.

(2) Soit $\bar{f}$ la restriction de f suivante $\begin{cases} \bar{f}: & \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{cases}$ Montrer que $\bar{f}$ est bien définie, bijective et calculer sa réciproque.