

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

Exercice 1. Calculer dans \mathbb{R}^2 :

- $(1, 2) + (5, 0)$
- $(-3) \cdot (1, 2)$
- $(1, 2) - (5, 0)$

Quelle est la distance de $(1, 2)$ à $(5, 0)$?

Soit A le point de coordonnées $(1, 2)$ dans le plan et B le point de coordonnées $(5, 0)$.

À quoi correspondent les points de coordonnées $(1, 2) + (5, 0)$, $(-3) \cdot (1, 2)$ et $(1, 2) - (5, 0)$?

Exercice 2. On pose $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5$ et $g(x_1, x_2) := x_1x_2 - 5$.

Que vaut la fonction $f + g$?

Calculer $f(0, 0)$, $f(1, -1)$?

Exercice 3. On pose

$$\begin{cases} f & : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_2 - x_1^2}, \\ g & : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{x_1}. \end{cases}$$

Donner les domaines de définition de f et de g . Calculer la somme des fractions rationnelles $f + g$ et le quotient $\frac{f}{g}$.

Exercice 4. On considère l'ensemble $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$.

Dessiner A . Cet ensemble est-il un ouvert ? Cet ensemble est-il un fermé ?

On considère l'ensemble $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq 0\}$. Est-il un fermé de \mathbb{R}^2 ? Est-il un ouvert de \mathbb{R}^2 ?

On pose $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = 0\}$. Est-il fermé ? Est-il ouvert ?

L'ensemble $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il borné ?

Donner un exemple d'ensemble qui n'est pas borné ?

Exercice 5. On considère l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$.

Dessiner A . Montrer que A est ouvert. Quel est le complémentaire de A ?

On considère $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$. Montrer que F est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Exercice 6. On pose

$$\begin{cases} f & : (x_1, x_2) \mapsto \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5}. \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de f ? Représenter graphiquement ce domaine. S'agit-il d'un ouvert ? S'agit-il d'un fermé ?

Exercice 7. On considère la fonction

$$h : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 - 4}.$$

Quel est le domaine de définition de h ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

On considère la fonction

$$k : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{h(x_1, x_2)}.$$

Quelle est le domaine de définition de k ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

Exercice 8. Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Quel est le domaine de définition \mathcal{D}_f de f ? Est-il ouvert? Est-il fermé?