CORRECTION DE LA FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1. On appelle à chaque fois f la fonction définie par la formule de la question.

(1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -\frac{25}{x^6} + \frac{7}{x^8} = -25x^{-6} + 7x^{-8}}.$$

(2) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}}}.$$

(3) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2+\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}}.$$

(4) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ($x^2 - 3x + 5 > 0$ et $\Delta = -11 < 0$).

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}}.$$

(5) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f'(x) = (\sin x) \times \sin(\cos x)}.$$

(6) La fonction f est définie sur $[-\frac{1}{3}\,;+\infty[$, $3x+1 \geq 0$, et dérivable sur $]-\frac{1}{3}\,;+\infty[$, $3x+1 > 0$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\cos(\sqrt{3x+1})}.$$

(7) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f'(x) = 4xe^{2x^2+1}}.$$

(8) La fonction f est définie et dérivable sur $]\frac{1}{3}\,;+\infty[$, $3x-1 > 0$.

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{3x-1}}.$$

(9) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \ln 3 \times 3^{\frac{1}{x}}}.$$

Exercice 2. On a $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{3x^2+2x}}$.

Exercice 3.

(1) $D_f = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 \neq 0\}$.
La fonction f est une fonction rationnelle. Elle admet donc des dérivées partielles sur tout son domaine de définition.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \boxed{6x_1 - x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \boxed{-\frac{2}{x_1} - x_1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,\, x_2) = \boxed{6},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,\, x_2) = \boxed{\frac{4}{x_2^3}},$$

Comme la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues, on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,\, x_2) = \boxed{-1}.$$

Exercice 4. On appelle à chaque fois f la fonction définie par la formule de la question.

(1) La fonction f est définie et admet des dérivées partielles sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > -1,\, y > -1\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \boxed{\frac{1}{x+1}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \boxed{\frac{2}{y+1}}.$$

(2) La fonction f est définie sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \boxed{5x^{-\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \boxed{y^{-\frac{1}{2}}}.$$

Soit $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x,\, \lambda y) = 10(\lambda x)^{\frac{1}{2}} + 2(\lambda y)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}(10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}) = \lambda^{\frac{1}{2}} f(x,\, y)$. La fonction f est donc homogène de degré $\frac{1}{2}$.

[*Autre Méthode*] Comme la fonction f admet des dérivées partielles continues, on peut appliquer le théorème d'Euler :
Comme $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \frac{1}{2} \times (10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}f(x,\, y)$ (identité d'Euler), alors la fonction f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

(3) La fonction f est définie sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x + 2y \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x + 2y > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \boxed{\frac{3}{2}\,(3x+2y)^{-\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \boxed{(3x+2y)^{-\frac{1}{2}}}.$$

La fonction f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

(4) La fonction f est définie sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x \geq 0,\, y \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0,\, y \leq 0)\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x > 0,\, y > 0) \text{ ou } (x < 0,\, y < 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.

(5) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ car $2x^2+3y^2 \geq 0$ et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \boxed{\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \boxed{\frac{3y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.

(6) La fonction f est définie sur $\{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, x_3 \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, x_3 > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \boxed{\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}x_3^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \boxed{\frac{1}{4}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{3}{4}}x_3^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \boxed{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}x_3^{-\frac{1}{2}}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.

Exercice 5. La fonction f est polynomiale. Elle est donc définie et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
On a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \boxed{10x_1 - 2x_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \boxed{6x_2 - x_1 + 14}$. Les points critiques sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = 10x_1 - 2x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = 6x_2 - x_1 + 14 = 0. \end{cases}$$

On trouve une seule solution $\boxed{\left(-\frac{14}{29}; -\frac{70}{29}\right)}$.