

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1.

Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. x \mapsto \frac{5}{x^5} - \frac{1}{x^7} & 2. x \mapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^3}} & 3. x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x}} \\ 4. x \mapsto \sqrt{x^2-3x+5} & 5. x \mapsto \cos(\cos x) & 6. x \mapsto \sin(\sqrt{3x+1}) \\ 7. x \mapsto e^{2x^2+1} & 8. x \mapsto \ln \frac{1}{3x-1} & 9. x \mapsto 3^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Exercice 2.

Calculer la dérivée de $\ln\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}}\right)$.

Conseil: Vous pouvez poser la fonction $u(x) := \sqrt{3+\frac{2}{x}}$, la dériver puis finir le calcul demandé.

Exercice 3.

(1) On considère la fonction

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto 3x_1^2 + \frac{2}{x_2} - x_1x_2 + 7 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

Pourquoi les dérivées partielles de f sont-elles définies sur tout le domaine de définition de f ?

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f . Que remarquez-vous entre $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$?

(2) Répondre aux mêmes questions avec les fonctions des exercices 6, 7 et 8 de la feuille de Travaux Dirigés 2.

Exercice 4.

Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, leur domaine de dérivabilité et calculer leurs dérivées partielles.

$$\begin{array}{lll} 1. (x, y) \mapsto \ln(1+x) + 2\ln(1+y) & 2. (x, y) \mapsto 10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} & 3. (x, y) \mapsto (3x+2y)^{\frac{1}{2}} \\ 4. (x, y) \mapsto \sqrt{xy} & 5. (x, y) \mapsto \sqrt{2x^2+3y^2} & 6. (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Pour les fonctions des exemples 2, 3, 4, 5 et 6 trouver le nombre α tel que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$. Vérifier que dans tous les cas, on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$, pour $\lambda > 0$.

Exercice 5.

On considère la fonction

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 14x_2 - 1 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

Déterminer les éventuels points critiques de la fonction f .

Exercice 6.

Donner une équation de la tangente au graphe de f , au point P où

- (1) $f(x) = 5(1 + x^2)^{-1}$ et $P = (-2, 1)$.
- (2) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ et $P = (4, 44)$.

Exercice 7.

En quel(s) point(s) la courbe d'équation $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ admet-elle un tangente

- (1) horizontale?
- (2) parallèle à la droite d'équation $2y + 8x = 1$?

Exercice 8.

Donner sans calcul la tangente à $y = 1 + 2x + x^4$ au point d'abscisse 0 et la position de la courbe par rapport à la tangente en ce point.