

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

Exercice 1 (Examen février 2005).

On considère la fonction

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 4. \end{cases}$$

- (1) Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux.
- (2) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.
- (3) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$.
- (4) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, -1) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, -1) = 0$. Calculer $f(0, -1)$.
- (5) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \times \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)\right)^2$.
- (6) Montrer que f admet en $(0, -1)$ un extremum local. Est-ce un maximum local ou un minimum local?
- (7) Trouver les points critiques de f (c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre un s'annulent).

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto e^{x^2+2y^2-2xy-y+1}. \end{cases}$

Posons $\Psi(x, y) := x^2 + 2y^2 - 2xy - y + 1$, de telle sorte que $f(x, y) = e^{\Psi(x, y)}$.

- (1) Quel est le domaine de définition de f ? Pourquoi la fonction f admet-elle des dérivées partielles?
- (2) On pose $C := (x_C, y_C)$ le seul point critique de f . Quelles sont les coordonnées de C ? Calculer la valeur ν de f en C .
- (3) La valeur ν est-elle un extremum local de la fonction f ?
Conseil: Utiliser la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_C, y_C) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_C, y_C) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_C, y_C)\right)^2$.
- (4) La valeur ν est-elle un maximum ou un minimum local?
Conseil: Utiliser la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_C, y_C) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_C, y_C)$.
- (5) La fonction f admet-elle un maximum global?

Exercice 3.

Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto (2x_1 + x_2)^2 - 4x_1 - 2x_2 + 7. \end{cases}$

- (1) Quel est le domaine de définition de h ? Pourquoi la fonction h admet-elle des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Chercher les points critiques de h .
- (3) Soit c un nombre réel et P un point de coordonnées (x_1, x_2) telles que $2x_1 + x_2 = c$. Tracer l'ensemble des points P vérifiant cette condition pour $c = -1, 0, 1, 2$ et 3 .

- (4) Si $2x_1 + x_2 = c$, que vaut $h(x_1, x_2)$?
- (5) La fonction h admet-elle un minimum global, maximum global? S'il existe, donner sa valeur et dire où il est atteint.

Exercice 4 (*Partiel décembre 2004*).

On considère la fonction $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + y. \end{cases}$

- (1) Quel est son domaine de définition?
- (2) Pourquoi cette fonction est-elle continue?

Posons $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 4y^2 = 1\}$.

- (3) Représenter graphiquement E .
- (4) Montrer que E est un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 .
- (5) Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur E et qu'ils sont atteints. Que valent M et m ? Où sont-ils atteints?

Exercice 5.

Une ménagère achète un adoucissant P_1 et une lessive P_2 . Le prix de l'adoucissant P_1 est p_1 et le prix de la lessive P_2 est p_2 . Elle achète des deux produits pour un panier global de 10 euros. Posons x_1 la quantité d'adoucissant achetée et x_2 la quantité de lessive achetée.

- (1) Écrire l'équation qui représente la valeur du panier acheté.

On modélise l'utilité du panier par la fonction

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto \ln(x_1 + 1) + 2 \ln(x_2 + 1). \end{cases}$$

- (2) Existe-t-il une utilité optimale? Si oui pour quelles quantités achetées?

On pose $\alpha(p_1, p_2)$ la quantité de lessive achetée dans ce cas.

- (3) Que se passe-t-il si $2p_1 \leq p_2 + 10$ et si $2p_1 \geq p_2 + 10$? Commenter ces résultats.
- (4) Quel est le signe de $\frac{\partial \alpha}{\partial p_1}$ et de $\frac{\partial \alpha}{\partial p_2}$? Commenter.
- (5) Si l'adoucissant coûte 2 euros et la lessive 5 euros, en quelles proportions faut-il acheter les deux produits pour un résultat maximal? Commenter.

Exercice 6.

On considère la fonction $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$

- (1) Quel est son domaine de définition?
- (2) Pourquoi cette fonction est-elle continue?

Posons $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$.

- (3) Représenter graphiquement A .
- (4) Montrer que A est un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 .

- (5) Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur A et qu'ils sont atteints.

Pour calculer m et M , on distingue deux cas. Posons F la frontière de l'ensemble A . L'ensemble F correspond donc au triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Soit I , l'intérieur de l'ensemble A , $I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x_1, 0 < x_2, x_1 + x_2 < 1\}$. On a donc $A = F \cup I$.

- (6) Montrer que I est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
 (7) Chercher et étudier les extrema de f sur I .
Conseil: Utiliser les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f .
 (8) Etudier les valeurs prises par la fonction f sur F .
 (9) Comparer les résultats des deux questions précédentes et conclure (donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes).

Exercice 7.

Soit A l'ensemble défini par $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

On considère maintenant la restriction de la fonction f de l'exercice 2 à A :

$$\begin{cases} g = f_A & : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{x^2+2y^2-2xy-y+1}. \end{cases}$$

- (1) Montrer que l'ensemble A est un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 .
 (2) Expliquer pourquoi la fonction g admet et atteint un minimum m et un maximum M .

Pour calculer m et M , on distingue deux cas. Posons F la frontière de l'ensemble A . L'ensemble F correspond donc au carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Soit I , l'intérieur de l'ensemble A , $I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. On a donc $A = F \cup I$.

- (3) Montrer que I est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
 (4) Le minimum m peut-il être atteint sur I ? Le maximum M peut-il être atteint sur I ?
Conseil: Utiliser l'exercice 2.
 (5) Etudier les valeurs prises par la fonction g sur F .
Conseil: Distinguer quatre cas.
 (6) Comparer les résultats des deux questions précédentes et conclure (donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes).

Exercice 8.

Soit A l'ensemble défini par $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, x_1 + x_2 \leq 4\}$.

- (1) Représenter graphiquement l'ensemble A .
 (2) Montrer que l'ensemble A est un ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 .

On considère la fonction f

$$\begin{cases} f & : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2. \end{cases}$$

- (3) Expliquer pourquoi la fonction f admet et atteint un minimum m et un maximum M .
 (4) Donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes.
Conseil: Inspirez-vous des exercices précédents.